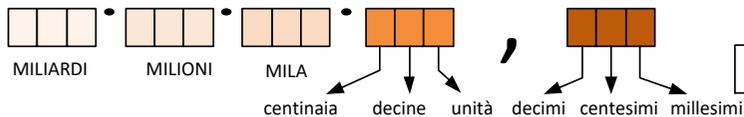
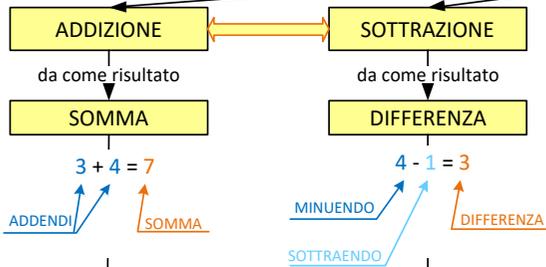
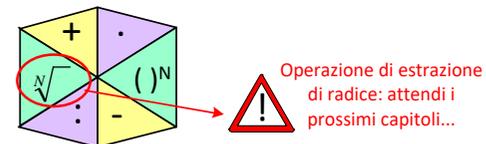


LE OPERAZIONI



alcune sono coppie di operazioni inverse → una è il contrario dell'altra

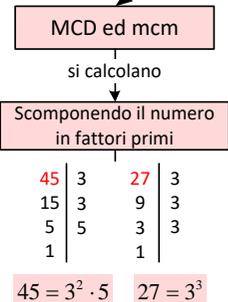


Proprietà

- Commutativa**
 $a + b = b + a$
Si può cambiare l'ordine degli addendi
- Associativa**
 $(a + b) + c = a + (b + c)$
Si può scegliere l'ordine con cui svolgere più somme
- Numero neutro = 0**
 $a + 0 = 0 + a = a$
Lascia il risultato invariato

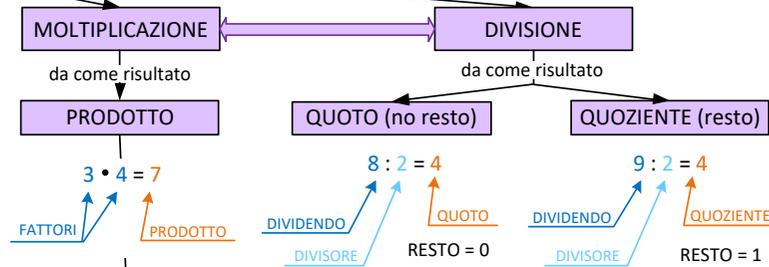
Proprietà

- Invariantiva**
 $a - b = (a \pm c) - (b \pm c)$
Si può sommare/ sottrarre lo stesso numero al minuendo e al sottraendo



MCD
Massimo Comune Divisore
FATTORI **COMUNI**
PRESI UNA SOLA VOLTA
CON ESPONENTE **MINORE**
 $MCD(45; 27) = 3^2$

mcm
Minimo Comune Multiplo
FATTORI **COMUNI E NON COMUNI**
PRESI UNA SOLA VOLTA
CON ESPONENTE **MAGGIORE**
 $mcm(45; 27) = 3^3 \cdot 5$



Proprietà

- Commutativa** → $a \cdot b = b \cdot a$
Si può cambiare l'ordine dei fattori
- Associativa** → $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Si può scegliere l'ordine con cui svolgere più prodotti
- Distributiva** → $a(b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$
Si moltiplicano separatamente i termini di un'addizione o di una sottrazione
- Numero neutro = 1** → $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Lascia il risultato invariato

Proprietà

- Invariantiva**
 $a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c)$
 $a : b = (a : c) : (b : c)$
Si può moltiplicare/dividere lo stesso numero al dividendo e al divisore
- Distributiva a destra**
 $(a \pm b) : c = a : c \pm b : c$
Si moltiplicano separatamente i termini di un'addizione o di una sottrazione

Una moltiplicazione ripetuta dello stesso numero è una

POTENZA $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$

Proprietà

$A^N \cdot A^K = A^{N+K}$ $A^0 = 1$
 $A^N : A^K = A^{N-K}$ $A^1 = A$
 $(A^N)^K = A^{N \cdot K}$ $0^A = 0$
 $(A \cdot B)^N = A^N \cdot B^N$ $1^A = 1$
 $(A : B)^N = A^N : B^N$

CRITERI DI DIVISIBILITA'

- PRIMO** → è divisibile solo per 1 e per se stesso 17
- divisibile per 2** → ultima cifra è pari 128
- divisibile per 3** → somma delle cifre è multiplo di 3 $1 + 2 + 9 = 12$
- divisibile per 4** → ultime due cifre divisibili per 4 416
- divisibile per 5** → ultima cifra è 5 oppure 0 155, 140
- divisibile per 9** → somma delle cifre è divisibile per 9 $3 + 9 + 5 + 1 = 18$

GLI INSIEMI NUMERICI

NUMERI COMPLESSI \mathbb{C}

NUMERI REALI \mathbb{R}

NUMERI NATURALI \mathbb{N}

NUMERI RAZIONALI ASSOLUTI \mathbb{Q}

NUMERI RELATIVI \mathbb{Z}

NUMERI IRRAZIONALI

NUMERI IMMAGINARI

PRIMI INSIEMI NUMERICI

NUMERI NATURALI \mathbb{N}

- Numeri interi positivi (incluso 0)
- Insieme discreto
- Esiste un successivo e un precedente



NUMERI RAZIONALI ASSOLUTI \mathbb{Q}



NUMERATORE
DENOMINATORE

FRAZIONI: coppie di numeri naturali

danno origine a

NUMERI DECIMALI

DECIMALI FINITI

DECIMALI PERIODICI SEMPLICI

DECIMALI PERIODICI MISTI

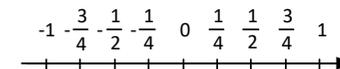
$$\frac{143}{100} \leftarrow 1,43$$

$$\frac{2134 - 21}{999} \leftarrow 21,341$$

$$\frac{26431 - 264}{990} \leftarrow 26,431$$

NUMERI RELATIVI \mathbb{Z}

- Numeri con segno



Prodotto dei segni:

$$\begin{aligned} + \cdot + &= + \\ + \cdot - &= - \\ - \cdot - &= + \end{aligned}$$

NUMERI CONCORDI \rightarrow stesso segno
NUMERI DISCORDI \rightarrow segno diverso

SEMPLIFICAZIONE

- $$\frac{18}{12} \stackrel{:2}{=} \frac{9}{6} \stackrel{:3}{=} \frac{3}{2}$$
- Dividendo numeratore e denominatore per lo stesso numero si ottiene una **FRAZIONE EQUIVALENTE**
 - Quando non è più possibile semplificare, la frazione è **RIDOTTA AI MINIMI TERMINI**

ADDIZIONE e SOTTRAZIONE

Tramite il minimo comune multiplo

$$\frac{4}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 - 3 \cdot 6}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{4}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{\text{mcm}(3; 4; 2)}{\text{mcm}(3; 4; 2)}$$

MOLTIPLICAZIONE e DIVISIONE

Nella moltiplicazione è possibile semplificare ad incrocio

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{4}{3} : \frac{9}{8} = \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{32}{27}$$

ELEVAMENTO A POTENZA

Si elevano a potenza sia il numeratore che il denominatore

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

RAZIONALIZZAZIONE

Il denominatore non deve mai essere una radice

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Si moltiplicano numeratore e denominatore per la radice

Operazione di estrazione di radice: attendi il prossimo anno...



I MONOMI

sono

Il prodotto di:

- Un fattore numerico
- Fattori letterali con esponenti naturali

- ✓ $-5 a^2 b^3 c$
- ✓ $xy^5(-2)$
- ✓ $2 a^{-2} b$
- ✗ xy^5-2x

GRADO

Grado del monomio $-5 b^3 c$ Rispetto ad una lettera

Somma degli esponenti di tutte le lettere

$-5 b^3 c$
 $3 + 1 = 4$

esponente di una lettera

Grado rispetto a $b \rightarrow 3$
Grado rispetto a $c \rightarrow 1$

MONOMI PARTICOLARI

Monomio nullo $0 a^2 b^3 c$

Monomi simili $-5 a^2 b^3 c$
 $3 a^2 b^3 c$

- Diverso coefficiente
- Stessa parte letterale

Monomi opposti $-5 a^2 b^3 c$
 $+5 a^2 b^3 c$

- Coefficienti uguali e opposti
- Stessa parte letterale

OPERAZIONI

SOMMA ALGEBRICA

si può fare SOLO SE

i monomi sono simili

- Si sommano/sottraggono solo i coefficienti
- La parte letterale rimane invariata

$$3a^2c - 5a^2c = -2a^2c$$

$$3a^2c + 5a^2c = 8a^2c$$

MOLTIPLICAZIONE

Si moltiplicano nell'ordine:

- i SEGNI
- i NUMERI
- Le LETTERE (proprietà delle potenze)

$$(+3a^2c^2)(-5abc^3) = -15a^3bc^5$$

$$a^2 \cdot a = a^{2+1} = a^3$$

$$b^0 \cdot b = b^{0+1} = b$$

$$c^2 \cdot c^3 = c^{2+3} = c^5$$

DIVISIONE

si può fare SOLO SE

il denominatore ha solo le lettere del numeratore con grado uguale o inferiore

Si dividono nell'ordine:

- i SEGNI (prodotto dei segni)
- i NUMERI
- Le LETTERE (proprietà delle potenze)

$$\frac{-15 a^2 b c^3}{5 a c^3} = +3 a b$$

$$a^2 : a = a^{2-1} = a$$

$$b : b^0 = b^{1-0} = b$$

$$c^3 : c^3 = c^{3-3} = c^0 = 1$$

ELEVAMENTO A POTENZA

Si elevano a potenza nell'ordine:

- i SEGNI
- i NUMERI
- Le LETTERE (proprietà delle potenze)

$$(-3a^3bc^2)^2 = +9a^6b^2c^4$$

$$(a^3)^2 = a^{2 \cdot 3} = a^6$$

$$(b)^2 = b^{1 \cdot 2} = b^2$$

$$(c^2)^2 = c^{2 \cdot 2} = c^4$$

- Se la potenza è pari il segno diventa positivo
 $(-3)^2 = +9$
- Se la potenza è dispari il segno rimane invariato
 $(-3)^3 = -27$

MCD ed mcm

MCD

FATTORI **COMUNI**
PRESI UNA SOLA VOLTA
CON ESPONENTE **MINORE**

$$MCD (9a^5x^2; 6a^2xy^2) = 3a^2x$$

mcm

FATTORI **COMUNI E NON COMUNI**
PRESI UNA SOLA VOLTA
CON ESPONENTE **MAGGIORE**

$$mcm (9a^5x^2; 6a^2xy^2) = 18a^5x^2y^2$$

I POLINOMI

FUNZIONI POLINOMIALI

- polinomi in cui compare una sola lettera (x)
- Indicati con P(x)
- ZERI: valori della x che annullano il polinomio

sono
Somme algebriche di più monomi chiamati
TERMINI DEL POLINOMIO

$$-5a^2 + 4b^3c - 3a + 1$$

Termine noto
(l'esponente delle lettere è 0)

si classificano in base a

COEFFICIENTI

GRADO

NUMERO DI TERMINI

Polinomio nullo

I coefficienti sono nulli

$$0x^2 + 0x + 0$$

Polinomi uguali

Tutti i termini sono uguali

$$3x^2 - 4x + 1$$

$$3x^2 - 4x + 1$$

Polinomi opposti

Tutti i termini sono uguali e opposti

$$3x^2 - 4x + 1$$

$$-3x^2 + 4x - 1$$

è il
massimo tra i gradi dei monomi presenti

$$-5a^2 + 4ab^3$$

Grado rispetto ad a → 2
Grado rispetto a b → 3

Polinomio omogeneo

Tutti i suoi monomi hanno lo stesso grado

$$x^2 + 4a^2 - 2bx$$

Polinomio ordinato

I termini sono scritti con grado crescente o decrescente rispetto ad una lettera

$$x^3 - 2x + 4$$

Polinomio completo

Ci sono tutte le potenze di una certa lettera, dal grado maggiore allo zero

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 4$$

binomio

2 termini

$$a^2 - b^2$$

trinomio

3 termini

$$x^2 + 2ax + a^2$$

quadrinomio

4 termini

$$x^3 - 2x^2 - 2x + 4$$

ADDIZIONE e SOTTRAZIONE

Si sommano i termini simili dei due polinomi

$$(x - 4) + (2x + 3) = x - 4 + 2x + 3 = 3x - 1$$

$$(x - 4) - (2x + 3) = x - 4 - 2x - 3 = -3x - 7$$

MOLTIPLICAZIONE

TRA UN MONOMIO E UN POLINOMIO

$$(-2x) \cdot (3x - 6) = -6x^2 + 12x$$

TRA DUE POLINOMI

$$(-2x + 4) \cdot (3x - 6) = -6x^2 + 12x - 12x + 24$$

CON I PRODOTTI NOTEVOLI

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

⚠ Occhio ai segni!

MCD ed mcm

MASSIMO COMUNE DIVISORE

Il più grande tra i divisori comuni

FATTORI **COMUNI**
PRESI UNA SOLA VOLTA
CON ESPONENTE **MINORE**

$$\text{MCD}(15; 27) = 3$$

$$\text{MCD}(9a^5x^2; -6a^2xy^2) = 3a^2x$$

$$\text{MCD}(x^2 - 9; x^3 - 5x^2 + 3x + 9) = (x - 3)$$

Minimo comune multiplo

Il più piccolo tra i multipli comuni

FATTORI **COMUNI E NON COMUNI**
PRESI UNA SOLA VOLTA
CON ESPONENTE **MAGGIORE**

$$\text{mcm}(15; 27) = 3^2 \cdot 5$$

$$\text{mcm}(9a^5x^2; -6a^2xy^2) = 18a^5x^2y^2$$

$$\text{mcm}(x^2 - 9; x^3 - 5x^2 + 3x + 9) = (x - 3)^2(x + 3)(x + 1)$$

DIVISIONE

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

Solo se il grado del numeratore N(x) è maggiore del grado del denominatore D(x)

SEMPLIFICAZIONE

Se al denominatore c'è un monomio

$$\frac{3ab - b^2}{-3b} = \frac{3ab}{-3b} + \frac{-b^2}{-3b} = -a + \frac{1}{3}b$$

RUFFINI

Se il denominatore ha forma (x ± a)

$$(2x^3 + 6x^2 - 5x - 3) : (x - 2)$$

Soluzione: $2x^2 + 10x + 15$
Resto: 27

	2	6	-5	-3
		+	+	+
		2·2	2·10	2·15
+2				
	2	10	15	27

ALGORITMO DELLA DIVISIONE

Vale sempre

$$(2x^3 + 6x^2 - 5x - 3) : (x^2 + 2)$$

Soluzione: $2x + 6$
Resto: $-9x - 15$

					$x^2 + 2$
					+
					$2x + 6$
					+
					$-2x^3$
					$-4x$
					-3
					+
					$-6x^2$
					-12
					+
					$-9x - 15$

SCOMPOSIZIONE IN FATTORI

$$2x^3 - 6x^2 + 2x - 6 = 2(x - 3)(x^2 + 1)$$

Scrivere un polinomio come prodotto di **FATTORI PRIMI**

Costanti

Polinomi di primo grado

Polinomi di grado superiore non riducibili

si esegue provando a

1) FARE UN RACCOLGIMENTO TOTALE (se ci sono elementi in comune a tutti i termini):

$$\begin{aligned} 3ax^2 + 3ax - 3a &= 3a(x^2 + x - 1) \\ -x^2 - 4 &= -(x^2 + 4) \\ -8x - 14x^3 &= -2 \cdot 4x - 2 \cdot 7x^3 = -2x(4 + 7x^2) \end{aligned}$$

2) FARE UN RACCOLGIMENTO PARZIALE (se ci sono un numero pari di elementi):

$$\begin{aligned} 3ax + 3bx - az - bz &= 3x(a + b) - z(a + b) = (a + b)(3x - z) \\ 14b - 4x - 7ab + 2ax &= 7b(2 - a) - 2x(2 - a) = (2 - a)(7b - 2x) \end{aligned}$$

3) UTILIZZARE I PRODOTTI NOTEVOLI:

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2 \\ a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b) \\ a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 &= (a + b)^3 \\ a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac &= (a + b + c)^2 \end{aligned}$$

! Occhio ai segni!
! Occhio ai segni!

5) UTILIZZARE RUFFINI $x^3 - 4x^2 + x + 6$

Trovare i divisori del termine noto:
 $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4$

Trovare tra di essi un divisore del polinomio (-1)

Scrivere la soluzione $(x+1)(x^2 - 5x + 6)$

1	-4	1	+6
	+	+	+
-1		-1	5
		-	-6
1	-5	+6	0

6) UTILIZZARE IL TEOREMA DELL'ALGEBRA $\rightarrow 1x^2 + bx + c = (x-x_1)(x-x_2)$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Formula per il calcolo delle radici

LE FRAZIONI ALGEBRICHE

sono

Espressioni algebriche formate dal rapporto tra due polinomi

$$\frac{\text{NUMERATORE}}{\text{DENOMINATORE}} \quad \frac{2a - 3}{3x + 1}$$

hanno delle

CONDIZIONI DI ESISTENZA!
denominatori $\neq 0$

si possono eseguire alcune

Operazioni

SEMPLIFICAZIONE

ADDIZIONE e SOTTRAZIONE

MOLTIPLICAZIONE

DIVISIONE

ELEVAMENTO A POTENZA

per

Ridurre la frazione ai minimi termini (numeratore e denominatore non hanno fattori comuni diversi da 1)

- SCOMPORRE tutti i polinomi
- SEMPLIFICARE se possibile
- Imporre le CONDIZIONI DI ESISTENZA
- Fare il MINIMO COMUNE MULTIPLO
- Svolgere le OPERAZIONI
- SCOMPORRE e SEMPLIFICARE

Nella moltiplicazione è possibile semplificare ad incrocio

$$\frac{\cancel{4}a}{a+1} \cdot \frac{\cancel{a+1}}{\cancel{8}b} = \frac{a}{2b}$$

- Si trasforma in una moltiplicazione tra:
- La prima frazione
 - Il reciproco della seconda

$$\frac{a+1}{3b} \cdot \frac{a+1}{ab} = \frac{a+1}{3b} \cdot \frac{ab}{a+1} = \frac{a}{3}$$

Si elevano a potenza sia il numeratore che il denominatore

$$\left(\frac{3b}{a+1}\right)^2 = \frac{(3b)^2}{(a+1)^2} = \frac{9b^2}{a^2 + 2a + 1}$$

$$\left(\frac{3b}{a+1}\right)^{-2} = \left(\frac{a+1}{3b}\right)^2$$

SOLO SE I TERMINI SONO MOLTIPLICATI!!!!

✓ $\frac{3(\cancel{a+1})(a^2 + 4)}{5(\cancel{a+1})(4a^2)}$

✗ $\frac{3(a+1) + (a^2 + 4)}{5(a+1) + (4a^2)}$

EQUAZIONE LINEARE (PRIMO GRADO)

è un

$$\overbrace{3(3x + 2)}^{1^\circ \text{ membro}} = \overbrace{15 - 4x + (x + 1)}^{2^\circ \text{ membro}}$$

uguaglianza tra due espressioni algebriche nella stessa variabile, riconducibile ad un'equazione di primo grado

gli esponenti sono tutti 1

c'è una sola variabile (x)

che

è verificata per un certo valore attribuito alla variabile

chiamato

SOLUZIONE

si risolve tramite

PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA
 $x + 2 = 3 \leftrightarrow 3x \pm (x + 2) = 3x \pm 3$

SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA
 $x + 2 = 3 \leftrightarrow 3 \cdot (x + 2) = 3 \cdot 3$

può essere

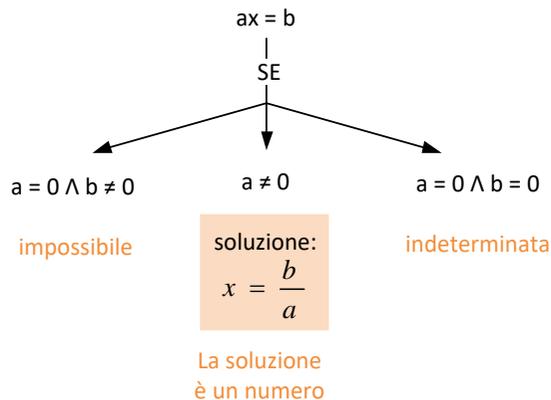
NUMERICA INTERA

NUMERICA FRATTA

- incognita solo al numeratore

- incognita anche al denominatore
- condizioni di esistenza C.E.

denominatori $\neq 0$



1) ricondurre ad un'unica frazione algebrica

$$\frac{x+1}{x-4} = 0$$

2) trovare la CONDIZIONE DI ESISTENZA C.E.

$$x - 4 \neq 0 \rightarrow x \neq +4$$

3) trovare la soluzione (numeratore = 0)

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$$

4) verificare che la soluzione si accettabile

$x + 2 = 3$ →

se $x = -1$	$-1 + 2 = 3$	$1 = 3$	✗
se $x = 0$	$0 + 2 = 3$	$2 = 3$	✗
se $x = 2$	$2 + 2 = 3$	$4 = 3$	✗
se $x = 1$	$1 + 2 = 3$	$3 = 3$	✓

DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

sono

$$3(3x + 2) > 15 - 4x + (x + 1)$$

1° membro 2° membro

disuguaglianze tra due espressioni algebriche nella stessa variabile, riconducibili ad espressioni di primo grado

che

hanno come soluzione un intervallo di numeri

si risolvono tramite

PRINCIPI DI EQUIVALENZA

PRIMO $x + 2 > 3 \leftrightarrow 3x \pm (x + 2) > 3x \pm 3$

SECONDO $x + 2 = 3 \leftrightarrow 3 \cdot (x + 2) = 3 \cdot 3$ 

Se il numero per cui si moltiplica è negativo si cambia il verso

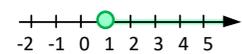
SISTEMI DI DISEQUAZIONI

PRODOTTO DI PIU' FATTORI

DISEQUAZIONI NUMERICHE FRATTE

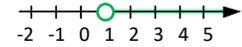
Estremo incluso 

$x \geq 1$



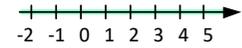
Estremo escluso 

$x > 1$



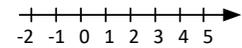
Qualunque numero è soluzione

$\forall x > 1$



Nessun numero è soluzione

$\nexists x \in \mathbb{R}$

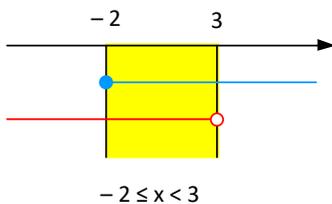


> maggiore
< minore
≤ minore o uguale
≥ maggiore o uguale

1) Risolvere le disequazioni

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x < +3 \end{cases}$$

2) Disegnare gli intervalli e trovare l'intersezione



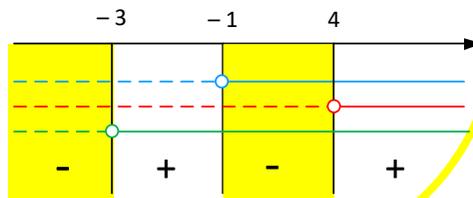
Parti in comune

$(x + 1)(x - 4)(x + 3) < 0$

1) Fare lo STUDIO DEL SEGNO dei singoli fattori

$$\begin{aligned} x + 1 > 0 &\rightarrow x > -1 \\ x - 4 > 0 &\rightarrow x > +4 \\ x + 3 > 0 &\rightarrow x > -3 \end{aligned}$$

2) disegnare gli intervalli e fare il prodotto dei segni



3) scegliere il segno in base verso della disequazione

1) ricondurre ad un'unica frazione algebrica

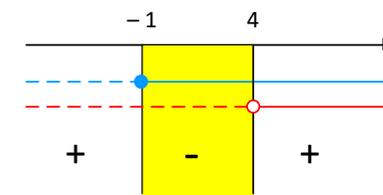
$\frac{x + 1}{x - 4} \leq 0$

2) studiare il segno di numeratore e denominatore 

$$\begin{aligned} x + 1 \geq 0 &\rightarrow x \geq -1 \\ x - 4 > 0 &\rightarrow x > +4 \end{aligned}$$

Il denominatore non può mai essere nullo (si usa solo $> <$)

3) disegnare gli intervalli e fare il prodotto dei segni



4) scegliere il segno in base verso della disequazione