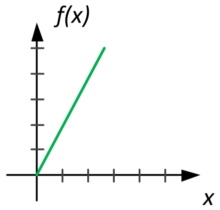
LE DERIVATE

sono

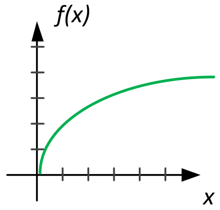
Funzioni che si ottengono da altre funzioni (chiamate PRIMITIVE) tramite un processo di DERIVAZIONE

rappresentano

La **PENDENZA** (coefficiente angolare) della retta tangente alla primitiva



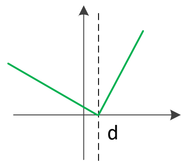
Pendenza costante
m = 2



Pendenza variabile

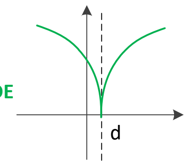
ALCUNI PUNTI NON SONO DERIVABILI

PUNTO ANGOLOSO



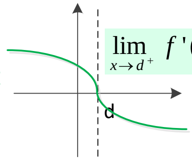
$$\lim_{x \to d^+} f'(x) = m_1$$
$$\lim_{x \to d^-} f'(x) = m_2$$

CUSPIDE



$$\lim_{x \to d^+} f'(x) = \pm\infty$$
$$\lim_{x \to d^-} f'(x) = \mp\infty$$

FLESSO A TANGENTE VERTICALE



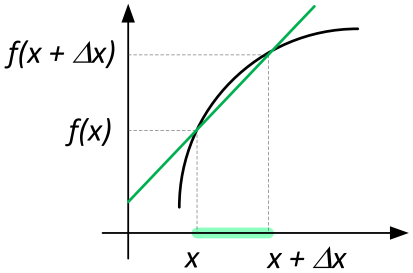
$$\lim_{x \to d^+} f'(x) = \lim_{x \to d^-} f'(x) = \pm\infty$$

si trovano

CON LA DEFINIZIONE ANALITICA

limite del rapporto incrementale per Δx che tende a zero

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



CON LE FORMULE DI CALCOLO

DERIVATE DELLE FUNZIONI BASE

$f(x) = k \longrightarrow f'(x) = 0$

$f(x) = x^N \longrightarrow f'(x) = N \cdot x^{N-1}$

$f(x) = \sin(x) \longrightarrow f'(x) = \cos(x)$

$f(x) = \cos(x) \longrightarrow f'(x) = -\sin(x)$

$f(x) = \log_a(x) \longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$

$f(x) = a^x \longrightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$

$f(x) = \arctan(x) \longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

OPERAZIONI CON LE DERIVATE

$D[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x)$

$D[f(x) \pm h(x)] = f'(x) \pm h'(x)$

$D[f(x) \cdot h(x)] = f'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot h'(x)$

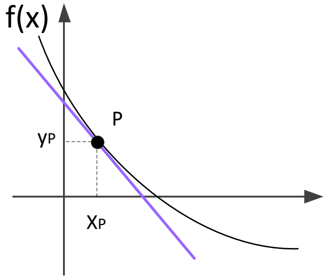
$D\left[\dfrac{n(x)}{d(x)}\right] = \dfrac{n'(x) \cdot d(x) - n(x) \cdot d'(x)}{[d(x)]^2}$

$D[f(h(x))] = f'(h(x)) \cdot D[h'(x)]$

APPLICAZIONI DELLE DERIVATE

RETTE TANGENTI

Retta tangente alla funzione f(x) in un suo punto P



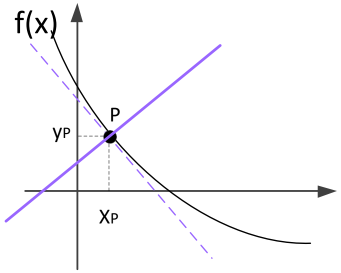
$$y = \colorbox{cyan}{$f'(x_P)$} \cdot x + \colorbox{yellow}{$y_P - f'(x_P) \cdot x_P$}$$

$m = f'(x_P)$

q

RETTE NORMALI

Retta normale (perpendicolare) alla funzione f(x) in un suo punto P



$$y = \frac{-1}{f'(x_P)} \cdot x + y_P + \frac{1}{f'(x_P)} \cdot x_P$$

$m = f'(x_P)$

q

De l'Hopital

Siano f(x) e g(x) due funzioni tali che:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

oppure

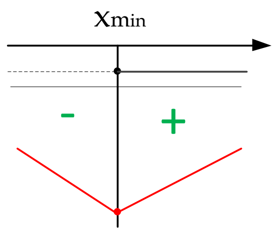
$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

allora si può calcolare il limite derivando numeratore e denominatore:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

MONOTONIA

$$f'(x) \geq 0$$



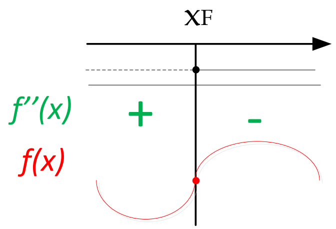
SE f'(x) = 0 ALLORA f(x) può avere:

- PUNTO DI MASSIMO
- PUNTO DI MINIMO
- FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE

PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE

FLESSI E CONCAVITA'

$$f''(x) \geq 0$$



SE f''(x) = 0 ALLORA f(x) può avere:

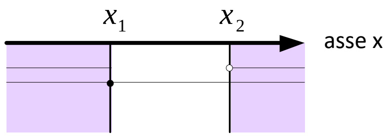
- FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE
- FLESSO A TANGENTE OBLIQUA

STUDIO DI FUNZIONE

DOMINIO

In quale parte dell'asse x la funzione esiste?

$$\begin{cases} \text{denominatore} \neq 0 \\ \text{radicando} \geq 0 \\ \text{argomento del logaritmo} > 0 \\ \text{argomento della tangente} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$



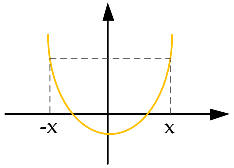
$$(-\infty; x_1] \vee (x_2; +\infty)$$

SIMMETRIE

La funzione è pari o dispari?

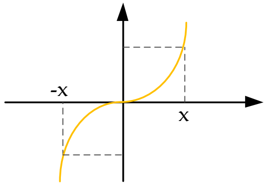
Funzione PARI
Simmetrica rispetto all'asse y

$$f(-x) = f(x)$$



Funzione DISPARI
Simmetrica rispetto all'origine

$$f(-x) = -f(x)$$



INTERSEZIONI

La funzione interseca i due assi?

Intersezioni con l'asse x

$$I_x = \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = 0$$

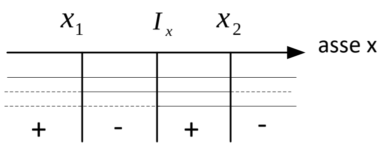
Intersezione con l'asse y (massimo 1)

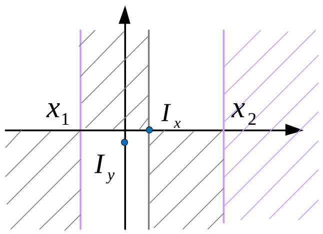
$$I_y = \begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$$

SEGNO

In quali parti la funzione è positiva e in quali è negativa?

$$f(x) > 0$$





ASINTOTI

Ci sono rette a cui la funzione si avvicina senza mai toccarle?

ASINTOTI VERTICALI

Si cercano nelle discontinuità del dominio

$$(-\infty; x_1] \vee (x_1; +\infty)$$

$$\lim_{x \to x_1^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

Se il risultato è ±∞ allora c'è un asintoto verticale di equazione:

$$x = x_1$$

ASINTOTI ORIZZONTALI

Si cercano all'infinito (se il campo di esistenza non è limitato

$$(-\infty; x_1] \vee (x_1; +\infty)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k$$

Se il risultato è un numero k allora c'è un asintoto orizzontale di equazione:

$$y = k$$

ASINTOTI OBLIQUI

Si cercano solo se non ci sono asintoti orizzontali

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$$

Se m=0, allora si calcola q e l'asintoto obliquo ha equazione:

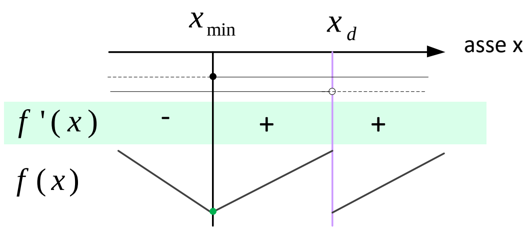
$$y = mx + q$$

MONOTONIA

Per quali intervalli dell'asse x la funzione cresce/decresce?

$$f'(x) \geq 0$$

$$P_{MIN}(x_{\min}; f(x_{\min}))$$

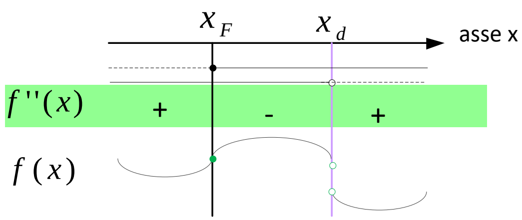


CONCAVITA'

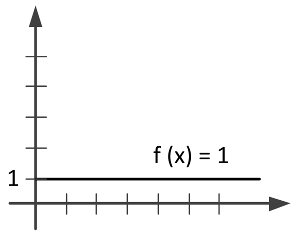
Per quali intervalli dell'asse x la funzione è rivolta verso l'alto?

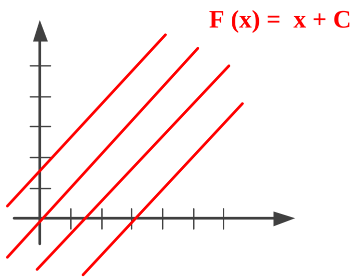
$$f''(x) \geq 0$$

$$P_F(x_F; f(x_F))$$



L'INTEGRALE





è

Un OPERATORE che trasforma una funzione f(x) in una famiglia di funzioni, chiamate PRIMITIVE F(x)

Funzioni che differiscono solo per una costante C chiamata COSTANTE DI INTEGRAZIONE

In modo che

La derivata della primitiva sia uguale alla funzione f(x):
$D[F(x)] = f(x)$

f(x) — **Derivazione (toglie qualcosa...)** → f'(x)

f(x) ← **integrazione (aggiunge qualcosa...)** — f'(x)

Funzioni elementari

$$\int k\,dx = x + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int -\frac{1}{\sin^2 x}dx = \cot + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$$

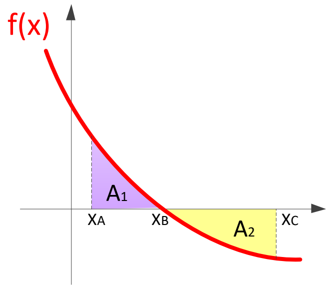
Funzioni composte

Dentro all'integrale deve comparire la derivata dell'argomento della funzione

$$\int \underbrace{2}_{f'(x)} \sin(\underbrace{2x}_{f(x)})dx = -\cos(\underbrace{2x}_{f(x)}) + C$$

Se manca solo una costante k è possibile farla comparire moltiplicando e dividendo per k

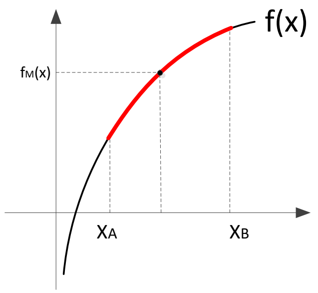
AREA SOTTESA



$$A_1 = \int_{x_A}^{x_B} f(x)dx$$

$$A_2 = -\int_{x_B}^{x_C} f(x)dx$$

PUNTO MEDIO DI UN ARCO



$$f_M(x) = \frac{1}{x_B - x_A}\int_{x_A}^{x_B} f(x)dx$$

CALCOLO COMBINATORIO

usa

operatori statistici

Il coefficiente binomiale: $\binom{n}{k}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

Il fattoriale: n!

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2 \cdot 1 = 2$

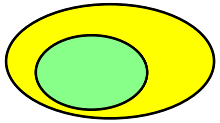
$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 1$

per

trovare il numero di possibili raggruppamenti di **k elementi pescati (classe k)** da un insieme di **n elementi**

n elementi a disposizione



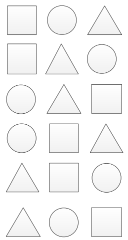
Classe K (numero di elementi pescati)

PERMUTAZIONI

- n = k
- ordinato

PERMUTAZIONI SEMPLICI

$P_n = n!$

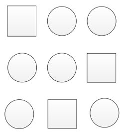


- Elementi totali n = 3

PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE

$$P'_n = \frac{n!}{a!\cdot b!\cdot \ldots}$$

Es. anagrammi



- Numero di elementi totali n = 2
- Elementi ripetuti:
  - Numero di quadrati a = 1
  - Numero di cerchi b = 2

DISPOSIZIONI

- n ≠ k
- ordinato

DISPOSIZIONI SEMPLICI $D_{n,k}$

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Es. giocatori di una squadra in campo

Sulla calcolatrice:

nDk

DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE $D'_{n,k}$

$D'_{n,k} = n^k$

Es. codice di apertura lucchetto, testa/croce

COMBINAZIONI

- n ≠ k
- non ordinato

COMBINAZIONI SEMPLICI $C_{n,k}$

$C_{n,k} = \binom{n}{k}$

Es. gioco del lotto

Sulla calcolatrice:

nCk

$\binom{n}{k}$

COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE $C'_{n,k}$

$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$

Es. k palline distribuite in n scatole

Sulla calcolatrice:

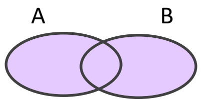
tCk

$\binom{n+k-1}{k}$

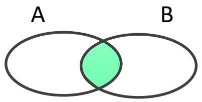
!!! unico caso in cui può essere k > n

CALCOLO DELLA PROBABILITA'

UNIONE → A U B (VEL: o l'uno o l'altro o entrambi)



INTERSEZIONE → A ∩ B (ET: l'uno E l'altro)



PROBABILITA' CONDIZIONATA → A | B (A sapendo che si è verificato B)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Formula di Bayes

si occupa di

fatti che possono accadere o non accadere (EVENTI)

- IMPOSSIBILI: non si verificano mai → P(E)=0
- ALEATORI: si verificano con una certa probabilità → 0<P(E)<1
- CERTI: si verificano sicuramente → P(E)=1

Gli EVENTI ALEATORI sono descritti dalla loro **PROBABILITA'**

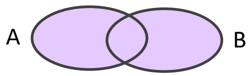
$$P(E) = \frac{\text{Numero di CASI FAVOREVOLI}}{\text{Numero di CASI POSSIBILI}}$$

Teoremi della SOMMA

unione U (VEL)

Eventi compatibili

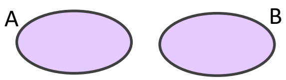
Possono verificarsi contemporaneamente



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Eventi incompatibili

NON possono verificarsi contemporaneamente



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Teorema dell'evento contrario

L'evento contrario $\bar{E}$ si verifica solo se l'evento E non si verifica

E = il canarino è vivo
$\bar{E}$ = il canarino è morto

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Teoremi del PRODOTTO

Intersezione ∩ (ET)

Per eventi che si verificano in successione

Eventi indipendenti

Il verificarsi di un evento NON influenza l'altro

Es. estrazioni con reinserimento

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

A è indipendente da B se: $P(A|B) = P(A)$

Eventi dipendenti

Il verificarsi di un evento influenza l'altro

es. estrazioni senza reinserimento

$$P(A \cap B) = P(B)\, P(A|B)$$

A è dipendente da B se: $P(A|B) \neq P(A)$

Dado truccato

Le probabilità di ogni faccia sono diverse, ma la somma deve sempre essere pari a 1

P (1) = 2x
P (2) = x
P (3) = x
P (4) = x
P (5) = x
P (6) = x

↓

Σ P(i) = 1

2x + x + x + x + x + x = 1
7x = 1

Prove ripetute

Probabilità di un evento ripetuto di cui si conosce la probabilità singola:

- θ = probabilità di successo del singolo evento
- n = numero di ripetizioni
- k = numero dei successi

Es. esame a crocette

$$P_{n,k} = \binom{n}{k} \cdot \theta^k \cdot (1-\theta)^{n-k}$$