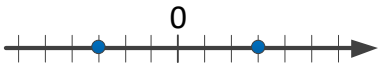
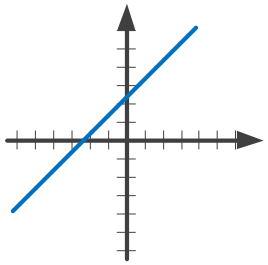


EQUAZIONI
$f(x) = 0$

DISEQUAZIONI
$f(x) > 0$



FUNZIONI
$y = f(x)$

- **ALGEBRICHE**
  - INTERE
    - RAZIONALI
    - IRRAZIONALI

    x sotto radice
  - FRATTE

    x al denominatore
- **TRASCENDENTI**
  - TRIGONOMETRICHE

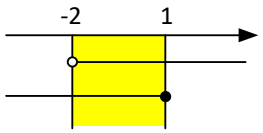
    x dentro ad una funzione goniometrica
  - ESPONENZIALI

    x all'esponente
  - LOGARITMICHE

    x dentro ad una funzione logaritmica

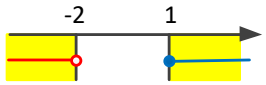
INTERSEZIONE ∩ → Parti in comune

$$\begin{cases} x > -2 \\ x \leq 1 \end{cases}$$



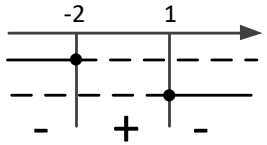
UNIONE U → Tutto insieme

$x < -2$ U $x \geq 1$



STUDIO DEL SEGNO (> < ≥ ≤) → Prodotto dei segni

$x < -2$
$x \geq 1$



EQUAZIONI E DISEQUAZIONI TRASCENDENTI DI TIPO ELEMENTARE

Attenzione al periodo:
Seno e coseno → 2π
Tangente → π

GONIOMETRICHE

Ricondurre ad una delle tipologie usando le formule

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{\tan^2 x + 1}$$

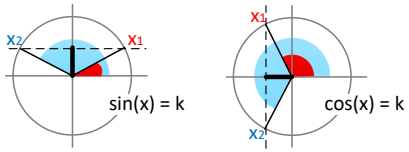
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

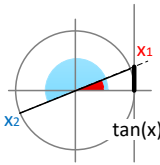
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

FONDAMENTALI





Il primo angolo si trova con la calcolatrice
Il secondo angolo si trova per simmetria

ELEMENTARI

C'è un solo tipo di funzione

$3\sin^2(x) + 2\sin(x) - 4 = 0$

$\sin(x) = t$

$3t^2 + 2t - 4 = 0$

Ritornare alla variabile originale e risolvere come una FONDAMENTALE

ESPONENZIALI

Nelle disequazioni, se la base è minore di 1 si cambia il verso...

Ricondurre ad una delle tipologie usando le proprietà

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a$$

$$(a^N)^K = a^{N \cdot K}$$

$$a^N \cdot a^K = a^{N+K}$$

$$\frac{a^N}{a^K} = a^{N-K}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^N = \left(\frac{b}{a}\right)^{-N}$$

$$\sqrt[N]{a^K} = a^{\frac{K}{N}}$$

SOLO 2 esponenziali Stessa base

$a^{f(x)} = a^{h(x)}$

Si tolgono le basi

$f(x) = h(x)$

SOLO 1 esponenziale

$a^{f(x)} = b$

Si usa la formula inversa

$f(x) = \log_a b$

SOLO 1 esponenziale ripetuto

$(a^x)^2 + a^x = k$

Si cambia la variabile

$a^x = t$

LOGARITMICHE

CONDIZIONI DI ESISTENZA
argomenti > 0

Ricondurre ad una delle tipologie usando le proprietà

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$$

$$\log_a x^b = b \cdot \log_a x$$

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

SOLO 2 logaritmi Stessa base

$\log_a f(x) = \log_a h(x)$

Si tolgono i logaritmi

$f(x) = h(x)$

SOLO 1 logaritmo

$\log_a f(x) = b$

Si usa la formula inversa

$f(x) = a^b$

SOLO 1 logaritmo ripetuto

$(\log_a x)^2 + \log_a x = k$

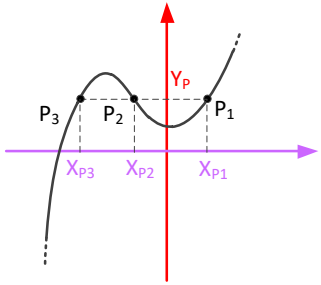
Si cambia la variabile

$\log_a x = t$

Confrontare con le CE

ANALISI DEL GRAFICO DELLE FUNZIONI

Y = variabile dipendente (CODOMINIO)



X = variabile indipendente (DOMINIO)

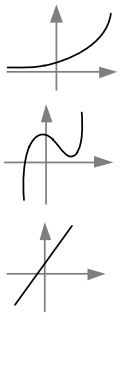
Y_P è **IMMAGINE** di X_{P1}
X_{P1}, X_{P2} e X_{P3} sono **CONTROIMMAGINI** di Y_P

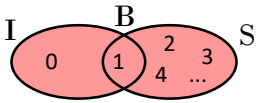
sono

relazioni che associano ad ogni elemento x∈R di un insieme chiamato DOMINIO, uno ed un solo elemento y∈R di un insieme chiamato CODOMINIO

Numero di controimmagini

- **INIETTIVA** — ogni Y è immagine di massimo una X
- **SURIETTIVA** — ogni Y è immagine di almeno una X
- **BIIETTIVA** — Ogni Y è immagine di una e una sola X





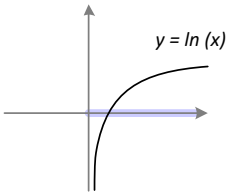
si rappresentano

- Analiticamente: y = f(x)
- Graficamente: in uno spazio cartesiano

STUDIO DEL GRAFICO

DOMINIO

Per quali valori di x la funzione esiste?



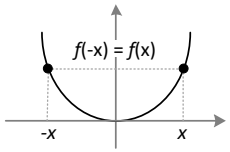
(0; +∞)

∀ ∈ R| x > 0

SIMMETRIE

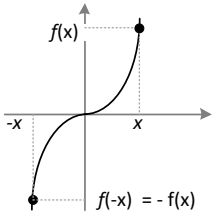
FUNZIONE PARI

simmetrica rispetto all'asse Y

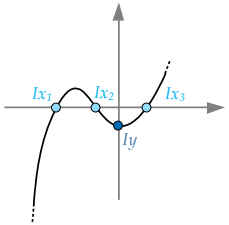


FUNZIONE DISPARI

Simmetrica rispetto all'origine



INTERSEZIONI CON GLI ASSI



Intersezioni con l'asse x

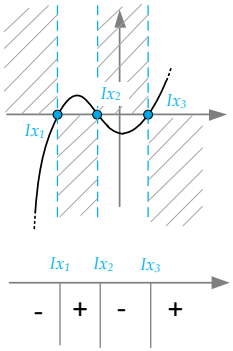
$Ix_1\ (x_1;\ 0)$
$Ix_2\ (x_2;\ 0)$
$Ix_3\ (x_3;\ 0)$

Intersezioni con l'asse y (al massimo una)

$Iy\ (0;\ y)$

SEGNO

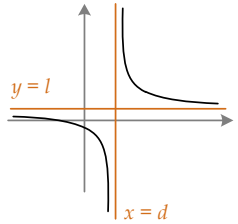
Per quali valori di x la funzione sta sopra l'asse x?



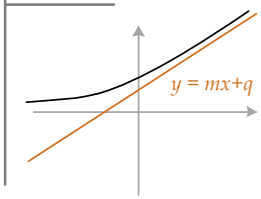
ASINTOTI

Rette alle quali la funzione si avvicina sempre di più, senza mai toccarle

VERTICALI e ORIZZONTALI



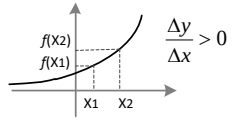
OBLIQUI



MONOTONIA

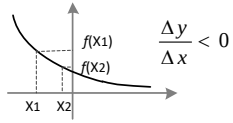
CRESCENTI

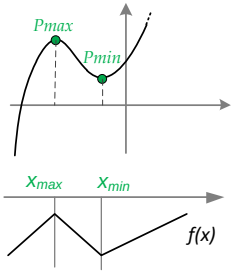
$x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



DECRESCENTI

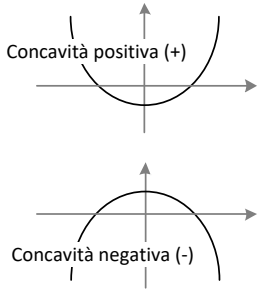
$x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

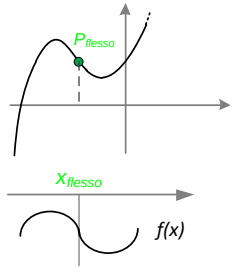




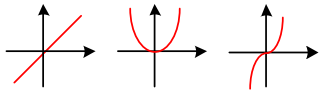
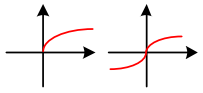
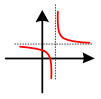
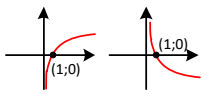
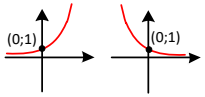
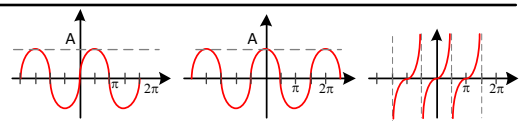
CONCAVITA'

La funzione è rivolta verso l'alto o verso il basso?





DISEGNO DELLE FUNZIONI

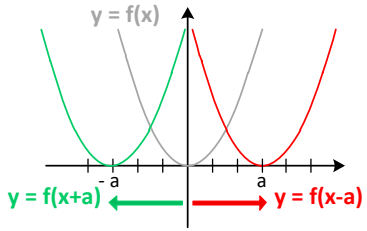
Polinomiali (intere)			Irrazionali		Funzione omografica (fratta)	Logaritmiche		Esponenziali		Trigonometriche		
					 Asintoto verticale: $X = -\frac{d}{c}$ Asintoto orizzontale: $Y = \frac{a}{c}$							
$Y = X$	$Y = X^2$	$Y = X^3$	$Y = \sqrt[2]{X}$	$Y = \sqrt[3]{X}$	$Y = \frac{ax + b}{cx + d}$	$Y = \log_2(x)$	$Y = \log_{0,1}(x)$	$Y = 2^x$	$Y = 0{,}2^x$	$Y = A \sin(\omega x)$	$Y = A \cos(\omega x)$	$Y = \tan(\omega x)$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ $T = \frac{\pi}{\omega}$

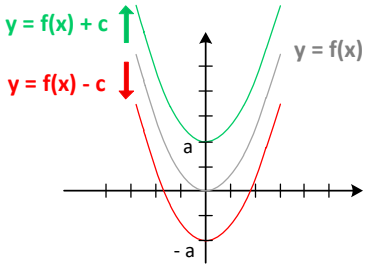
TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

TRASLAZIONI

LUNGO L'ASSE x $y = f(x \pm a)$

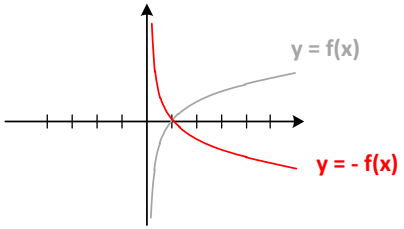


LUNGO L'ASSE y $y = f(x) \pm c$

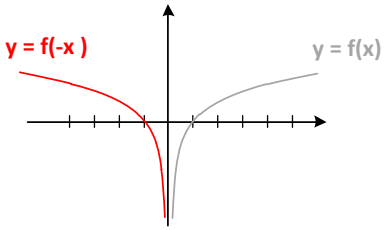


ROTAZIONI

ATTORNO ALL'ASSE x $y = -f(x)$

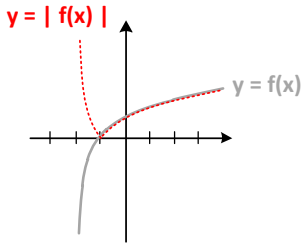


ATTORNO ALL'ASSE y $y = f(-x)$

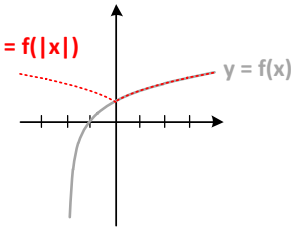


VALORE ASSOLUTO

VALORE ASSOLUTO DELLA FUNZIONE

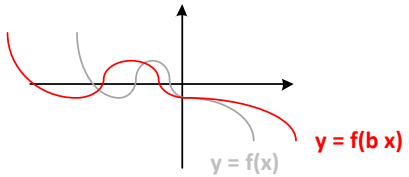


VALORE ASSOLUTO DELLA x

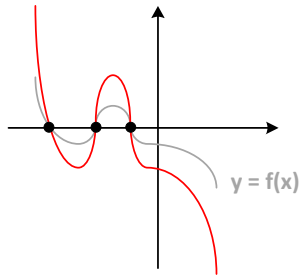


DILATAZIONI

AUMENTO SULLA x $y = f(b \cdot x)$



AUMENTO SULLA Y: $y = b \cdot f(x)$



CALCOLO DEI LIMITI

Sostituire la x nella funzione

È una forma determinata?

SI

$N \quad \frac{0}{\infty}=0 \quad \frac{\infty}{0}=\infty \quad \frac{N}{0}=\infty \quad \frac{0}{N}=0 \quad \frac{N}{\infty}=0 \quad \frac{\infty}{N}=\infty$

NO

$\infty-\infty \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 0\cdot\infty \quad 1^{\infty}$

FUNZIONE POLINOMIALE

$\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$

METODO 1: raccogliere le x di grado più alto e semplificare

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4x^2}{-2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{3}{x}+4\right)}{\cancel{x^2}\left(-2+\frac{1}{x^2}\right)}$$

METODO 2: confrontare l'ordine di infinito

- grado N > grado D → Risultato: ∞
- grado N < grado D → Risultato: 0
- grado N = grado D → Risultato: rapporto coefficienti grado più alto

FUNZIONE IRRAZIONALE

$\lim_{x\to c}\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)$

- Moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{a}+\sqrt{b}$
- Usare il prodotto notevole:

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a - b$

Scomporre i polinomi e semplificare:

- Calcolatrice $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$...
- Prodotti notevoli

$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$
$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$
$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$

- Ruffini

$x^3 + 2x^2 + x + 2$

	1	2	1	2
		+	+	+
-2		-2·1	-2·0	-2·1
	1	0	1	0

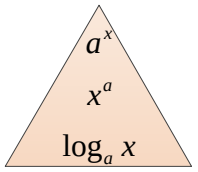
$x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x + 2)(x^2 + 1)$

FUNZIONE TRASCENDENTE

$\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$

Il risultato è determinato dal termine che va ad infinito più rapidamente

ESPONENZIALE
POTENZA
LOGARITMO



Metodo di De L'Hopital:
Attendi il prossimo anno...

LA CONTINUITA’

Una funzione è continua se:
In ogni punto il limite destro e sinistro coincidono e danno un valore finito che appartiene al codominio della funzione

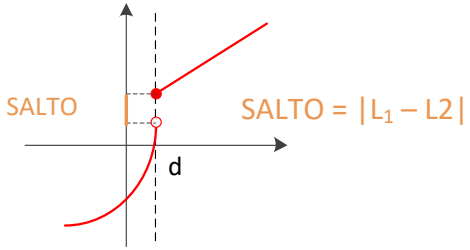
Funzione con discontinuità in x = d

Che tipo di discontinuità?

1° specie: SALTO

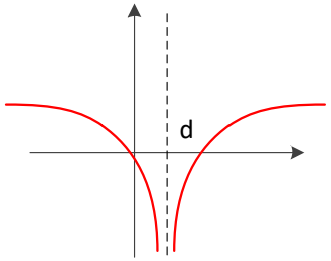
$$\lim_{x \to d^+} f(x) = L_1$$
$$\lim_{x \to d^-} f(x) = L_2$$

$$L_1 \neq L_2$$



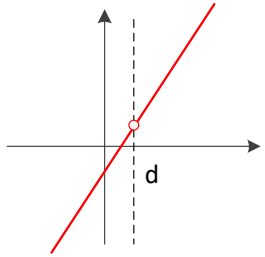
2° specie: ASINTOTO VERTICALE

$$\lim_{x \to d^+} f(x) = \pm\infty$$
$$\lim_{x \to d^-} f(x) = \pm\infty$$



3° specie: ELIMINABILE

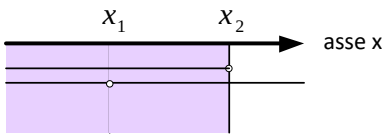
$$\lim_{x \to d^+} f(x) = \lim_{x \to d^-} f(x) = L$$



STUDIO DI FUNZIONE

DOMINIO → In quale parte dell'asse x la funzione esiste?

$$\begin{cases} \text{denominatore} \neq 0 \\ \text{radicando} \geq 0 \\ \text{argomento del logaritmo} > 0 \\ \text{argomento della tangente} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

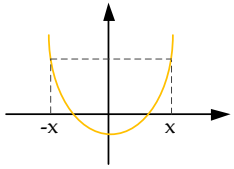


$$(-\infty\,;\,x_1] \vee (x_1;\,x_2)$$

SIMMETRIE → La funzione è pari o dispari?

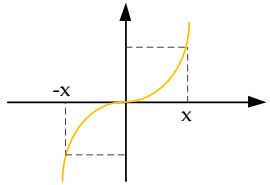
Funzione PARI
Simmetrica rispetto all'asse y

$$f(-x) = f(x)$$



Funzione DISPARI
Simmetrica rispetto all'origine

$$f(-x) = -f(x)$$



INTERSEZIONI → La funzione interseca i due assi?

Intersezioni con l'asse x

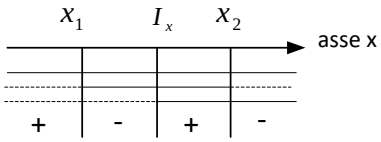
$$I_x = \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \quad f(x) = 0$$

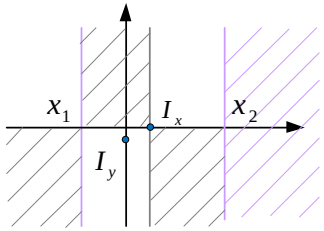
Intersezione con l'asse y (massimo 1)

$$I_y = \begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$$

SEGNO → In quali parti la funzione è positiva e in quali è negativa?

$$f(x) > 0$$





ASINTOTI → Ci sono rette a cui la funzione si avvicina senza mai toccarle?

$$(-\infty\,;\,x_1] \vee (x_1;\,+\infty)$$

ASINTOTI VERTICALI

Si cercano nelle discontinuità del dominio

$$(-\infty\,;\,x_1] \vee (x_1;\,+\infty)$$

$$\lim_{x \to x_1^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

Se il risultato è ±∞ allora c'è un asintoto verticale di equazione:

$$x = x_1$$

ASINTOTI ORIZZONTALI

Si cercano all'infinito (se il campo di esistenza non è limitato

$$(-\infty\,;\,x_1] \vee (x_1;\,+\infty)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k$$

Se il risultato è un numero k allora c'è un asintoto orizzontale di equazione:

$$y = k$$

ASINTOTI OBLIQUI

Si cercano solo se non ci sono asintoti orizzontali

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} [\, f(x) - mx \,]$$

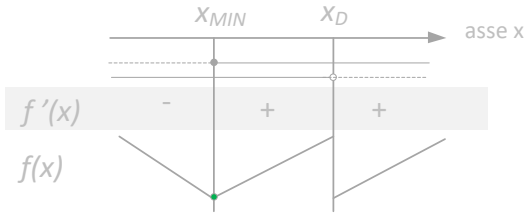
Se m ≠ 0, allora si calcola q e l'asintoto obliquo ha equazione:

y = mx + q

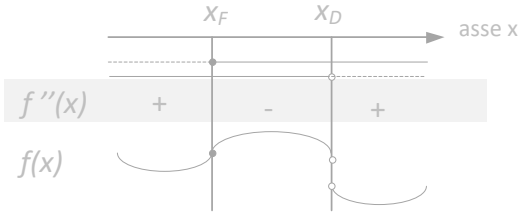
MONOTONIA → Per quali intervalli dell'asse x la funzione cresce/decresce?

$$f'(x) \geq 0$$

$$P_{MIN}\,(x_{MIN};\, f(x_{MIN}))$$



CONCAVITA' → Per quali intervalli dell'asse x la funzione è rivolta verso l'alto?

$$f''(x) \geq 0$$

$$P_F\,(x_F;\, f(x_F))$$