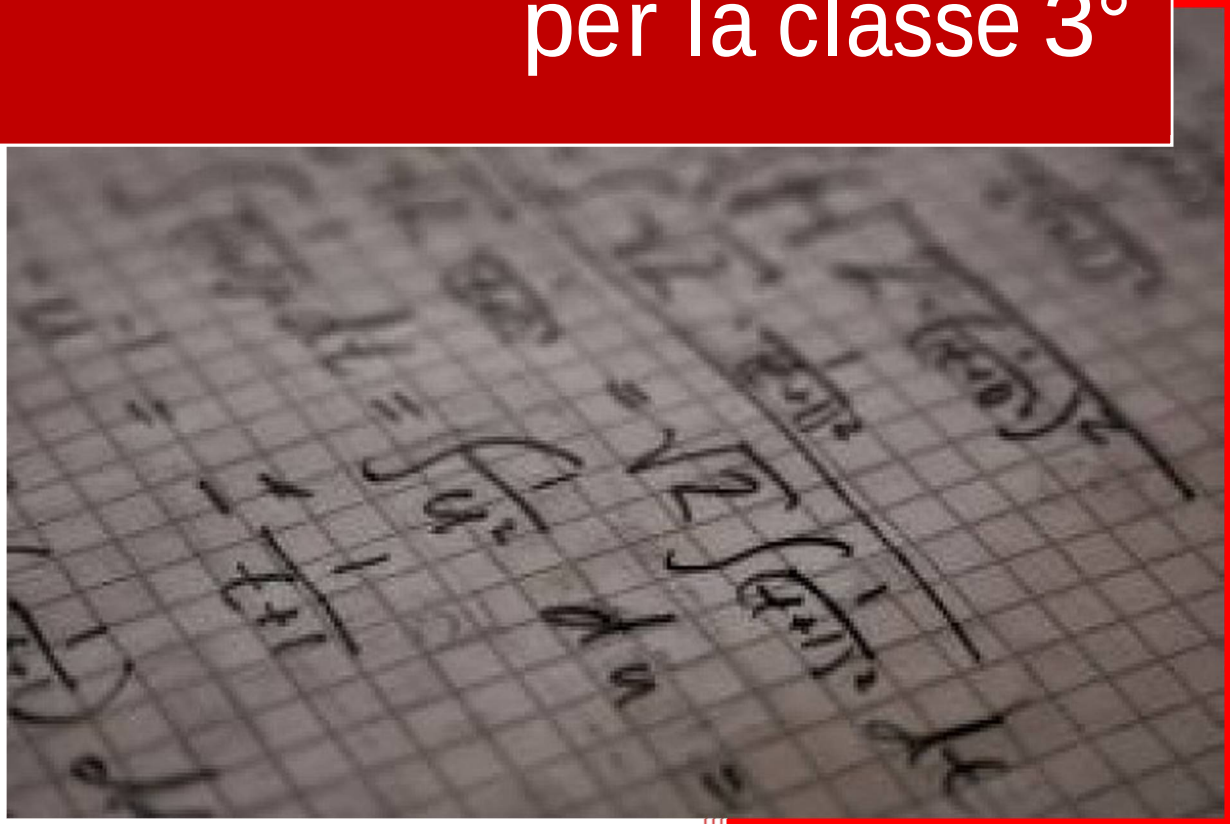
TECLA

SPELGATTI

TEORIA MATEMATICA

per la classe 3°



Questo testo è distribuito con licenza Common Creative:
http://creativecommons.org/licenses/

CC BY-NC-ND Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate

E' permesso scaricare l'opera e condividerla con altri, ma non modificarla ne utilizzarla, interamente o in parte, per scopi commerciali.

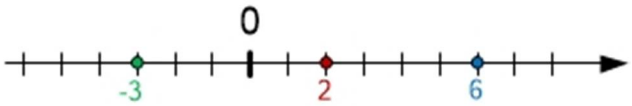
1.IL PIANO CARTESIANO

Disegniamo una **RETTA ORIENTATA**, cioè una retta con un verso, e suddividiamola in parti uguali che chiamiamo unità:

In corrispondenza di una delle tacche posizioniamo lo zero. Esso divide la linea in due parti:

- una semiretta in cui ci sono i numeri positivi, che chiamiamo **SEMIASSE POSITIVO**
- una semiretta in cui ci sono i numeri negativi, che chiamiamo **SEMIASSE NEGATIVO**

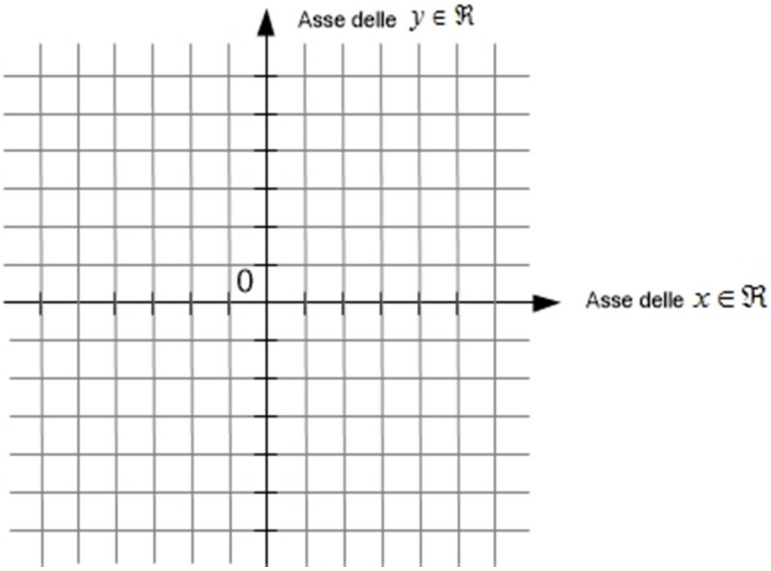
Su questo asse possiamo indicare tutti i numeri reali, che chiameremo con la generica lettera x. Ad esempio $x = -3$, $x = 2$, $x = 6$:



Questo sarà quindi l'**ASSE DELLE** $x \in \mathbb{R}$. Sull'asse x ci sono infiniti numeri.

Disegniamo adesso un altro asse, perpendicolare al primo, in modo che i due zeri coincidano. Anche sull'asse verticale si possono indicare tutti i numeri reali, ma questa volta vengono chiamati con la lettera y.

Questo sarà dunque l'**ASSE DELLE** $y \in \mathbb{R}$. Anche sull'asse y ci sono infiniti numeri:



Questi due assi, perpendicolari tra loro (si dice che sono coordinati a 90°) prendono il nome di **PIANO CARTESIANO**. Il punto in cui si incontrano si chiama **ORIGINE DEGLI ASSI**.

Sul piano cartesiano si possono disegnare punti, segmenti, figure geometriche e curve.

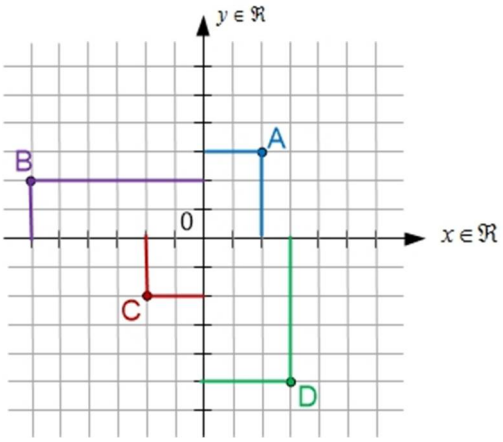
1.1. *Punti nel piano cartesiano*

Nel piano cartesiano ci sono infiniti punti. Ogni punto si individua tramite le sue **COORDINATE**. Ogni punto nel piano ha due coordinate:

- La coordinata x, chiamata anche **ASCISSA DEL PUNTO**, è la posizione della proiezione del punto sull'asse orizzontale che quindi viene chiamato anche asse delle ascisse.
- La coordinata y, chiamata anche **ORDINATA DEL PUNTO**, è la posizione della proiezione del punto sull'asse verticale che quindi viene chiamato anche asse delle ordinate.

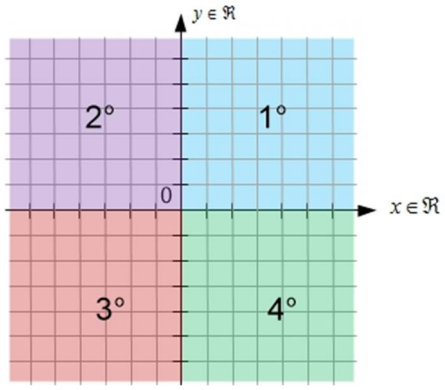
Il punto si indica con una lettera maiuscola e le sue coordinate si scrivono tra parentesi, prima la coordinata x e poi la coordinata y:

$$A\ (x_A, y_A) = A(2,3)$$
$$B\ (x_B, y_B) = B(-6,2)$$
$$C\ (x_C, y_C) = C(-2,-2)$$
$$D(x_D, y_D) = D(3,-5)$$



Il piano cartesiano risulta quindi diviso in 4 parti:

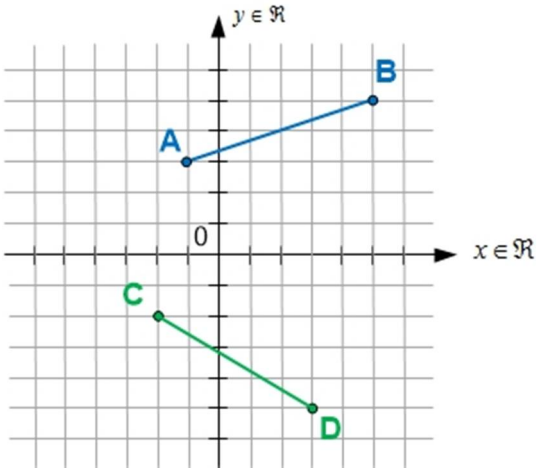
- Il **PRIMO QUADRANTE**, in cui i punti hanno ascissa e ordinata positiva
- Il **SECONDO QUADRANTE**, in cui i punti hanno ascissa negativa e ordinata positiva
- Il **TERZO QUADRANTE**, in cui i punti hanno sia ascissa che ordinata negativa
- Il **QUARTO QUADRANTE**, in cui i punti hanno ascissa positiva e ordinata negativa



1.2. *Segmenti nel piano cartesiano*

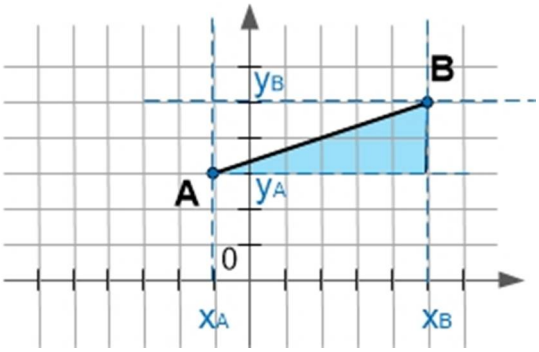
Se uniamo due punti otteniamo un segmento. Il segmento è caratterizzato da:

- Una lunghezza, indicata con la lettera d
- Un punto medio indicato con la lettera M



1.2.1. *Calcolo della lunghezza di un segmento*

La lunghezza di un segmento si calcola con il teorema di Pitagora. Consideriamo ad esempio il segmento AB: se tracciamo le perpendicolari agli assi otteniamo un triangolo rettangolo la cui ipotenusa è proprio il segmento che stiamo considerando:



I cateti si ottengono dalla sottrazione delle coordinate dei due punti estremi del segmento:

$$c_1 = y_B - y_A$$

$$c_2 = x_B - x_A$$

Nel caso del cateto corto questa operazione è evidente dal disegno.

Invece nel caso del cateto lungo è necessaria una considerazione: dal disegno si vede che il cateto lungo è la somma delle due coordinate, non al differenza…

Però la coordinata x_A è negativa mentre quella x_B è positiva, quindi quando si fa la sottrazione il segno meno si annulla:

$$c_1 = y_B - y_A = 5 - 3 = 2$$

$$c_2 = x_B - x_A = 5 - (-1) = 5 + 1 = 6$$

A questo punto è possibile usare il teorema di Pitagora per calcolare la distanza:

$$(c_1)^2 + (c_2)^2 = i^2 \quad \rightarrow \quad i = \sqrt{(c_1)^2 + (c_2)^2}$$

Dunque:

$$\boldsymbol{AB = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}}$$

1.2.2. *Calcolo del punto medio di un segmento*

Il punto medio è quello che si trova esattamente a meta de segmento, dividendolo in due parti uguali. La formula per il suo calcolo si ricava da considerazioni sulla media matematica.

Uno studente ha preso 7 in una verifica e 5 in un'altra verifica. Che media ha?

Il calcolo da fare è il seguente:

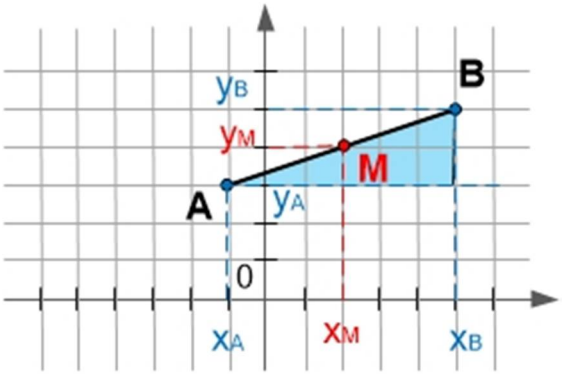
$$Media = \frac{Voto\,1 + Voto\,2}{2} = \frac{7 + 5}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Per il punto medio del segmento bisogna fare lo stesso ragionamento. Il punto medio M ha due coordinate:

$$M\ (x_M;\ y_M)$$

Per trovare le due coordinate bisogna fare la media matematica tra le coordinate x dei punti estremi e le coordinate y dei punti estremi.

Nel caso del segmento AB:



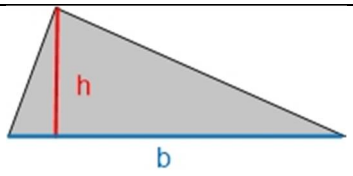
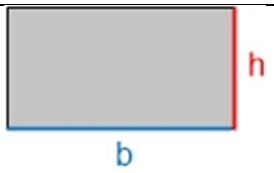
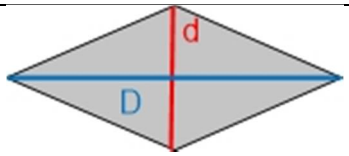
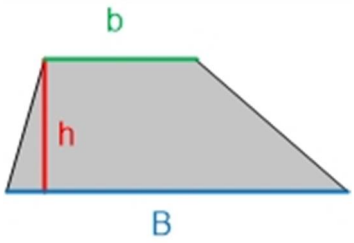
$$\boldsymbol{x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2}$$

$$\boldsymbol{y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5 + 3}{2} = \frac{8}{2} = 4}$$

1.3. *Figure nel piano cartesiano*

Unendo diversi segmenti si possono disegnare delle figure nel piano cartesiano ed è possibile calcolare il perimetro e l'area di ciascuna sapendo quanto sono lunghi i segmenti che le compongono e utilizzando le formule studiate in geometria nelle scuole medie.

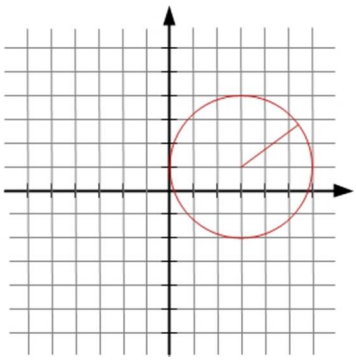
La tabella seguente mostra le formule per il calcolo delle aree delle principali figure:

Triangolo		$Area = \frac{b \times h}{2}$
Quadrato		$Area = l^2$
Rettangolo		$Area = b \times h$
Rombo		$Area = \frac{D \times d}{2}$
Trapezio		$Area = \frac{(B + b) \times h}{2}$

1.4. *Curve nel piano cartesiano*

Nel piano cartesiano è possibile disegnare una curva qualunque. Questo però è possibile anche senza un piano cartesiano: basta un qualunque foglio di carta.

Qual è allora la differenza tra una curva, ad esempio un cerchio, disegnata nel piano cartesiano e una curva disegnata su un foglio bianco?



Tra le due circonferenze c'è una differenza importantissima.

Se ci domandiamo: dove si trova la circonferenza? Nel caso in cui la circonferenza è disegnata in un piano cartesiano possiamo dire esattamente come è fatta e dove si trova [possiamo ad esempio dire che il suo centro si trova nel punto di coordinate (3;2)]; nel caso in cui è disegnata su un foglio privo di riferimenti non siamo in grado di rispondere alla domanda…

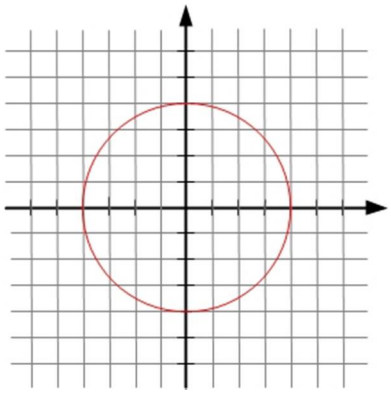
Il piano cartesiano inoltre ci consente di utilizzare una nuova lingua: quella della matematica.

Il linguaggio matematico è fatto di numeri, lettere, operatori, segni. Non è un linguaggio semplice, ma è molto importante perché è un modo molto efficiente per descrivere la realtà che ci circonda e per poter progettare cellulari, automobili, satelliti.

Per poter usare dei numeri dobbiamo avere un sistema di riferimento e il piano cartesiano ci offre proprio questa possibilità.

Per capire bene cosa significa usare il linguaggio matematico facciamo un esempio.

Alla domanda: che tipo di circonferenza è quella disegnata nel piano seguente?



Possiamo rispondere in diversi modi:

- è un cerchio con centro nell'origine e raggio lungo 4
- it's a circle with center in the origin and radius 4
- $x^2 + y^2 = 2$

Le prime due risposte utilizzano l'italiano e l'inglese per dire esattamente di che cerchio si tratta. L'ultima risposta dice la stessa cosa delle prima due, ma lo fa con la lingua della matematica.

Lo scopo di questo corso è imparare le basi di questa lingua per descrivere matematicamente le principali curve nel piano.

1.5. *Esercizi*

Esercizio 1: calcola la lunghezza e il punto medio dei segmenti di cui sono note le coordinate degli estremi

Punto A	Punto B	Lunghezza	Punto medio
$A(2,4)$	$B(1,5)$	$d = 1{,}41$	$M\left(\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$
$C(-1,3)$	$D(-2,-4)$	$d = 7{,}07$	$M\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$
$E(0,2)$	$F(-5,-1)$	$d = 5{,}83$	$M\left(-\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$
$G(2,-6)$	$H(-3,0)$	$d = 7{,}81$	$M\left(-\frac{1}{2},-3\right)$

2.LA GEOMETRIA ANALITICA

In matematica si parla di luogo geometrico per indicare un insieme di punti che occupano un certo spazio (luogo) nel piano cartesiano e che quindi danno origine ad una curva. Una curva infatti è formata da infiniti punti, l'uno di fianco all'altro.

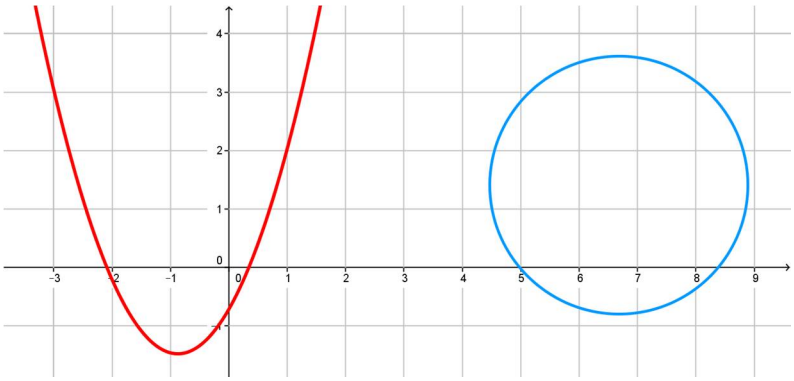
Non si tratta però di punti a caso. Di solito questi insiemi di punti hanno qualche caratteristica fissa. Ad esempio, nelle circonferenze i punti stanno tutti alla stessa distanza dal centro.

Dunque, **UN LUOGO GEOMETRICO È UN INSIEME DI PUNTI CHE SODDISFANO TUTTI UNA STESSA CONDIZIONE MATEMATICA**.

Alcuni luoghi geometrici sono molto importanti e il loro studio viene chiamato **GEOMETRIA ANALITICA**. Il termine geometria si riferisce al fatto che si studiano delle figure (triangoli, cerchi e altre ancora) ma lo si fa all'interno di un sistema di riferimento (il piano cartesiano) e quindi è possibile analizzarne matematicamente le caratteristiche.

Alcuni luoghi geometrici hanno una caratteristica particolare.

Consideriamo le due curve seguenti:



La curva rossa è aperta e se tracciamo una linea verticale, perpendicolare all'asse delle x, la curva viene intersecata solo una volta. La curva blu invece è chiusa: se tracciamo una linea verticale essa viene intersecata due volta.

Le curve che hanno la proprietà di essere intersecate solo una volta da una linea verticale si chiamano **FUNZIONI**. Le funzioni sono dei particolari luoghi geometrici che si studiano in una parte della matematica chiamata analisi, oggetto del corso del quarto e del quinto anno.

2.1. *I luoghi geometrici*

Abbiamo detto che ogni luogo geometrico (cioè ogni curva) può essere indicata con la lingua della matematica tramite un espressione.

L'espressine matematica che descrive un luogo geometrico è formata da alcuni elementi:

- Le **VARIABILI x E y**: esse rappresentano le coordinate dei punti che appartengono alla curva.
- I **COEFFICIENTI NUMERICI**: sono dei numeri legati alle variabili tramite degli operatori matematici
- Un **SEGNO DI UGUAGLIANZA**. Un luogo geometrico può essere visto come un'identità, cioè come due espressioni che devono essere uguali affinché l'uguaglianza sia vera.

Esempi di espressioni matematiche di luoghi geometrici sono:

$$y = 3x + 4$$

$$x^2 + y^2 + 3x - 4y = 6$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

2.1.1. *Quando un punto appartiene ad un luogo geometrico?*

Le variabili si scrivono con la lettera x e con la lettera y, ma questi due simboli rappresentano in realtà le coordinate dei punti che appartengono alla curva.

Per capire questo concetto facciamo degli esempi.

L'espressione matematica:

$$y = 3x + 4$$

Rappresenta un luogo geometrico. Il punto A di coordinate $A(1,\ 7)$ appartiene a questo luogo perché la sua coordinata x e la sua coordinata y, sostituite all'interno dell'espressione matematica, danno un identità, cioè la rendono vera:

$$y_A = 3x_A + 4 \quad \rightarrow \quad 7 = 3 \cdot 1 + 4 \quad \rightarrow \quad 7 = 7$$

Invece il punto B di coordinate $B\ (2, 4)$ non appartiene al luogo geometrico perché:

$$y_B = 3x_B + 4 \quad \rightarrow \quad 4 = 3 \cdot 2 + 4 \quad \rightarrow \quad 4 = 10$$

Dunque, **UN PUNTO APPARTIENE AD UN LUOGO GEOMETRICO SE LE SUE COORDINATE, SOSTITUITE NELL'ESPRESSIONE DEL LUOGO GEOMETRICO STESSO, DANNO UN'IDENTITÀ**.

2.2. *Un famiglia di luoghi geometrici: le coniche*

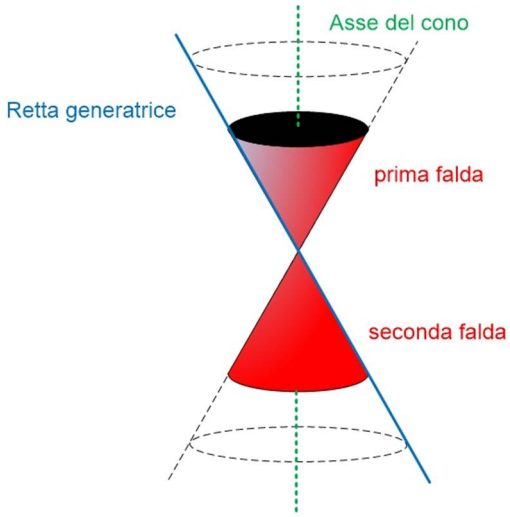
Una famiglia importante di luoghi geometrici sono le cosiddette coniche.

Le coniche sono delle curve che si ottengono intersecando un cono con un piano. Esse sono:

- La retta
- La circonferenza
- La parabola
- L'ellisse
- L'iperbole

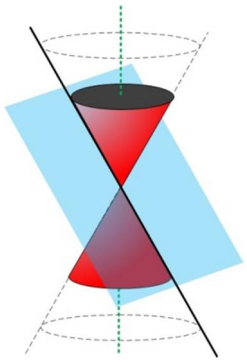
Lo scopo della geometria analitica è imparare a scrivere l'espressione matematica delle coniche o a disegnarle data la loro espressione matematica.

Il cono da cui hanno origine le coniche è una superficie infinita, formata dalla rotazione di una retta, chiamata **RETTA GENERATRICE**, attorno ad un **ASSE**. Si ottengono due mezzi coni (come quelli del gelato), chiamati **FALDE**:

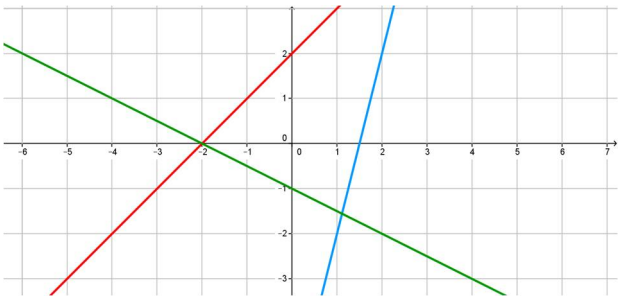


2.2.1. *La retta*

La retta non viene considerata come una vera e propria conica perché si ottiene quando il piano è tangente al cono:



Nel piano cartesiano possono essere disegnate infinite rette, ognuna con la sua espressione matematica.



La retta rossa ha come espressione matematica:

$$y = x + 2$$

La retta verde ha come espressione matematica:

$$y = -\frac{1}{2}x - 1$$

La retta blu ha espressione matematica:

$$y = 4x - 6$$

Queste espressioni hanno in comune una cosa: le due variabili x e y sono entrambe di primo grado. Ciò che cambia sono solo i loro coefficienti numerici, ma la struttura rimane sempre la stessa.

Per scrivere un'espressione generica, indichiamo i numeri con delle lettere, chiamate **PARAMETRI**:

$$y = mx + q$$

Il parametro m viene chiamato **COEFFICIENTE ANGOLARE**; il parametro q viene chiamato **INTERCETTA ALL'ORIGINE**.

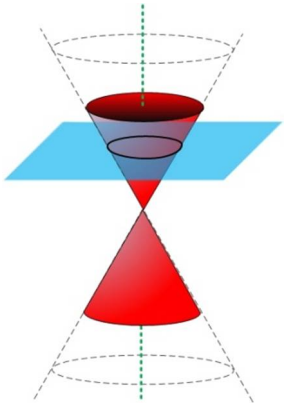
Sostituendo a m e q dei numeri otteniamo tutte le possibili rette. Ad esempio:

Coefficiente angolare	Intercetta all'origine	Espressione della retta
$m = 1$	$q = 2$	$y = x + 2$
$m = -1$	$q = -3$	$y = -x - 3$
$m = 2$	$q = -1$	$y = 2x - 1$
$m = -\frac{1}{2}$	$q = 4$	$y = -\frac{1}{2}x + 4$
$m = 0$	$q = -2$	$y = -2$
$m = 3$	$q = 0$	$y = 3x$

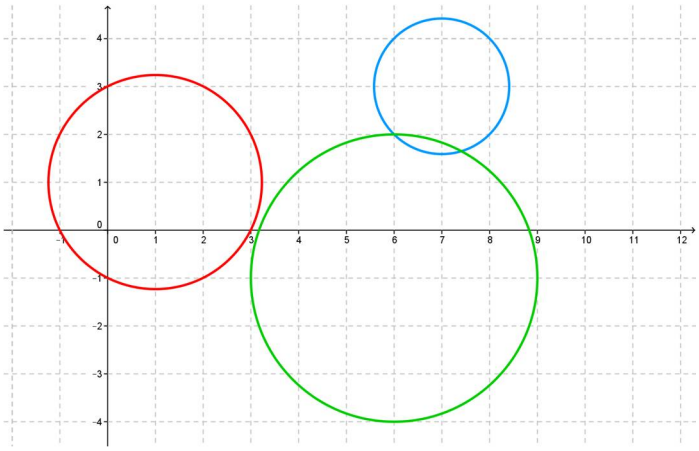
Dunque, **LA RETTA HA ESPRESSIONE MATEMATICA $y = mx + q$ DOVE m È IL COEFFICIENTE ANGOLARE E q È L'INTERCETTA ALL'ORIGINE. LA RETTA SI RICONOSCE PERCHÉ NELLA SUA ESPRESSIONE MATEMATICA LE VARIABILI SONO ENTRAMBE DI PRIMO GRADO**.

2.2.2. *La circonferenza*

La circonferenza è una conica che si ottiene sezionando un cono con un piano perpendicolare all'asse:



Nel piano cartesiano possono essere disegnate infinite circonferenze ognuna con la sua espressione matematica:



La circonferenza rossa ha espressione:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 4 = 0$$

La circonferenza blu ha espressione:

$$x^2 + y^2 - 12x - 6y + 56 = 0$$

La circonferenza verde ha espressione:

$$x^2 + y^2 - 12x + 2y + 28 = 0$$

Quello che queste espressioni hanno i comune è la presenza di entrambe le due variabili elevate al quadrato e con coefficiente numerico pari a 1.

La generica espressione di una circonferenza è:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

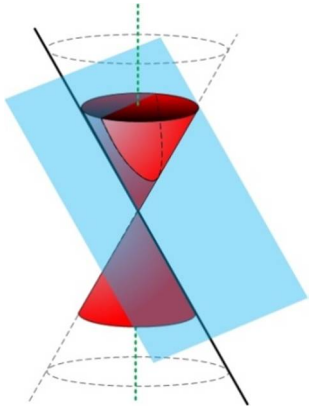
Assegnando ai parametri a, b, c dei valori numerici si possono ottenere tutte le circonferenze possibili. Ad esempio:

a	b	c	Espressione della circonferenza
$a = 1$	$b = 2$	$c = -3$	$x^2 + y^2 + x + 2y + 3 = 0$
$a = -1$	$b = -3$	$c = -12$	$x^2 + y^2 - x - 3y - 12 = 0$
$a = 2$	$b = -1$	$c = -9$	$x^2 + y^2 + 2x - y - 9 = 0$
$a = -\frac{1}{2}$	$b = 4$	$c = 0$	$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + 4y = 0$
$a = 0$	$b = -2$	$c = -4$	$x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$
$a = 0$	$b = 0$	$c = -1$	$x^2 + y^2 - 1 = 0$

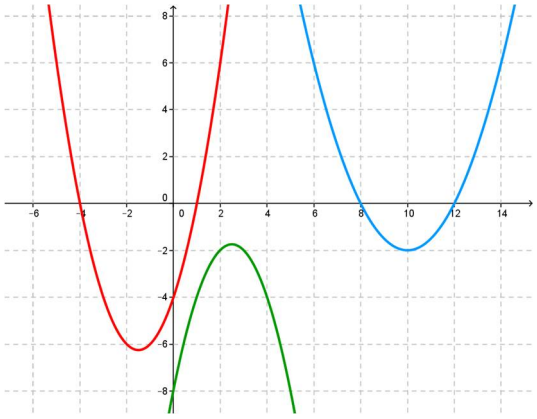
Nel caso della circonferenza, come vedremo nel capitolo ad essa dedicato, i coefficienti non possono assumere tutte le combinazioni di valori, ma devono rispettare delle regole. Per ora tuttavia cin interessa solo imparare a riconoscere l'equazione della circonferenza.

2.2.3. ***La parabola***

La parabola si ottiene sezionando un cono con un piano parallelo alla generatrice.



Nel piano cartesiano la parabola assume la forma seguente:



L'espressione matematica della parabola rossa è:

$$y = x^2 + 3x - 4$$

L'espressione matematica della parabola blu è:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 10x + 48$$

L'espressione matematica della parabola verde è:

$$y = -x^2 + 5x - 8$$

Le parabole hanno tutte in comune il fatto di avere la variabile y di primo grado e la variabile x elevata al quadrato.

La generica espressione della parabola è infatti:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Dando ai parametri a, b, c un valore numerico qualunque si ottengono tutte le possibili parabole.

Il valore di a è molto importante: esso non può essere nullo e il suo segno stabilisce se la parabola è rivolta all'insù o se è rivolta all'ingiù.

In particolare, se $a > 0$ la parabola sorride: in termini tecnici si dice che ha concavità positiva. Se invece $a < 0$ allora la parabola è triste e si dice che ha concavità negativa.

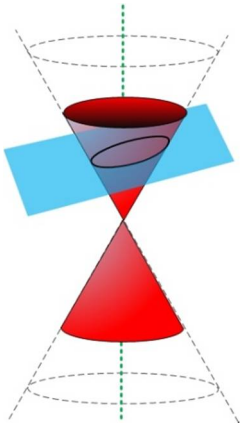
Esempi di parabole sono:

a	b	c	Espressione della parabola
$a = 1$	$b = 2$	$c = 3$	$y = x^2 + 2y + 3$
$a = -1$	$b = -3$	$c = -12$	$y = -x^2 - 3y - 12$
$a = 2$	$b = -1$	$c = 9$	$y = 2x^2 - x + 9$
$a = -\frac{1}{2}$	$b = 4$	$c = 0$	$y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$
$a = 1$	$b = 0$	$c = -4$	$y = x^2 - 4$
$a = 1$	$b = 0$	$c = 0$	$y = x^2$

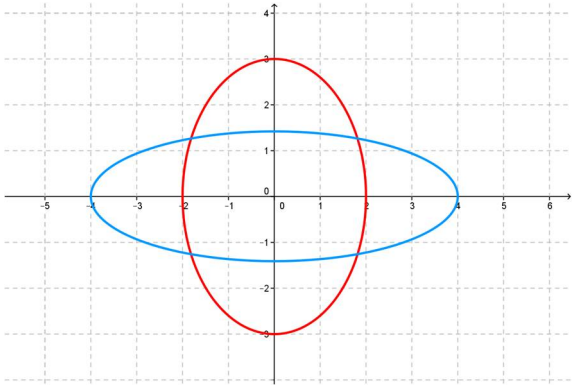
2.2.4. *L'ellisse*

L'ellisse è una curva chiusa che si ottiene sezionando un cono con un piano passante per una sola falda.

Il piano non deve essere né perpendicolare all'asse né parallelo alla generatrice.



Le ellissi che studieremo in questo corso hanno la caratteristica di essere centrate nell'origine:



L'ellisse rossa ha espressione:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

L'ellisse blu ha espressione:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{2} = 1$$

Le due curve hanno in comune la struttura:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

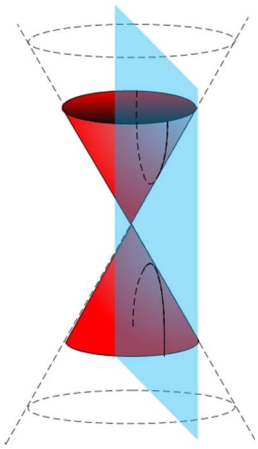
Dando ad a e a b dei valori si ottengono tutte le ellissi.

Esempi di ellissi sono:

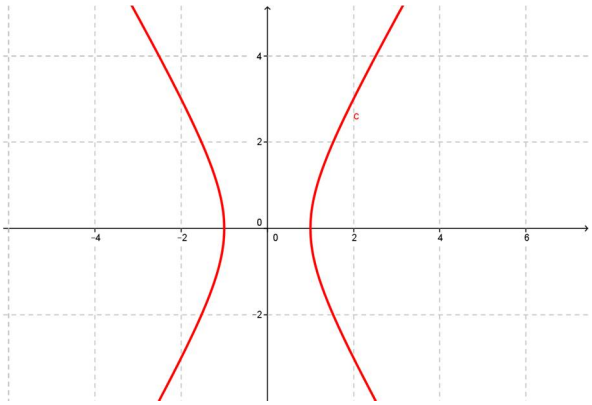
a	b	Espressione dell'ellisse
$a = 2$	$b = 3$	$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
$a = 3$	$b = 4$	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$
$a = 4$	$b = 5$	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

2.2.5. *L'iperbole*

L'iperbole è una curva doppia poiché si ottiene dall'intersezione di un cono con un piano parallelo all'asse e passante quindi per entrambe le falde:



L'iperbole è fatta in questa maniera:



Anche per l'iperbole in questo corso studieremo solo un caso particolare: quello in cui la curva ha centro nell'origine.

L'espressione di questo tipo di iperbole è la seguente:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

E' molto simile a quella dell'ellisse, ma ha il meno al posto del più.

2.2.6. *Perché le coniche sono importanti?*

Le coniche sono un gruppo di curve molto importanti, al punto che ad esse è dedicato un intero anno scolastico.

Il motivo del loro valore è da ricercare nello spazio. I pianeti, i satelliti, gli asteroidi, le comete e tutti i corpi celesti si muovono infatti lungo traiettorie coniche. Esse sono le uniche "strade" consentite.

2.3. *Esercizi*

ESERCIZIO 1: indica se il punto appartiene o no al luogo geometrico

PUNTO	LUOGO	CALCOLO	APPARTIENE	NON APPARTIENE
$A(1,4)$	$y = 3x + 1$	$4 = 3 \cdot 1 + 1 \quad \rightarrow \quad 4 = 4$	X	
$P\left(\frac{1}{3}, 5\right)$	$y = x^2 + 3x - 4$			
$C(1,0)$	$x^2 + y^2 = 1$			
$H(1,-3)$	$y = x^2 - 4$			
$D(3,1)$	$y = \frac{2x + 3}{x + 6}$			
$B(2,-1)$	$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$			
$E(1,-2)$	$x^2 + y^2 + 3x = 8$			

ESERCIZIO 2: indica il tipo di conica

LUOGO GEOMETRICO	Retta	Circonferenza	Parabola	Ellisse	Iperbole
$3x + 4y + 1 = 0$	X				
$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$					
$x^2 + y^2 - 3x + 2y = 4$					
$y = 2x^2 - 4x + 1$					
$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$					
$x^2 + y^2 = 2$					
$y = x^2 + x + 1$					
$y = 3x - \frac{1}{5}$					
$\frac{x^2}{4} = 1 - \frac{y^2}{16}$					
$3y = 5x + 2$					
$1 = \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4}$					

3.LA RETTA

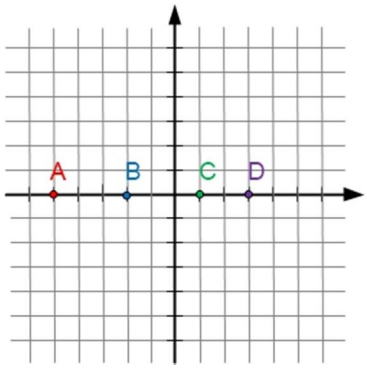
In questo capitolo impareremo a scrivere l'equazione della retta, a disegnarla e a fare semplici esercizi che la riguardano.
Nel piano cartesiano esistono infinite rette, ma ce ne sono alcune particolari.

3.1. *Rette particolari*

Le rette che sono perpendicolari agli assi (cioè orizzontali o verticali) sono rette con un'espressione piuttosto semplice.

3.1.1. *Equazione degli assi*

Gli assi del piano cartesiano sono delle rette particolari.
Per scrivere la loro equazione possiamo domandarci che coordinate hanno i punti che appartengono ad essi. Ricordiamo infatti che se un punto appartiene ad una curva, le sue coordinate sostitute nell'espressione matematica la rendono un'identità.



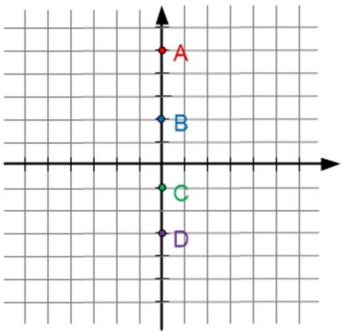
I punti sull'asse sono:

$$A(-5,0)$$
$$B(-2,0)$$
$$C(1,0)$$
$$D(4,0)$$

La caratteristica che hanno in comune tutti questi punti è che la loro y è nulla. Quindi l'equazione dell'asse delle x sarà:

$$y = 0$$

Cioè, tutti i punti che hanno ordinata nulla appartengono all'asse x.
Lo stesso ragionamento ci consente di trovare l'equazione dell'asse y:



I punti sull'asse sono:

$$A(0,5)$$
$$B(0,2)$$
$$C(0,-1)$$
$$D(0,-4)$$

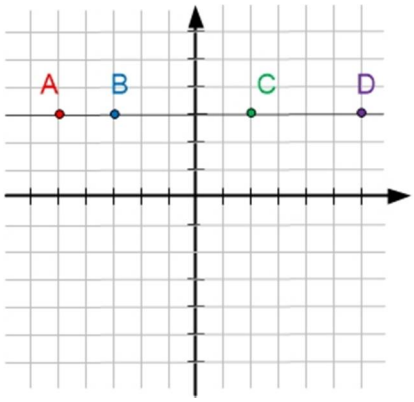
La caratteristica che hanno in comune tutti questi punti è che la loro x è nulla. Quindi l'equazione dell'asse delle y sarà:

$$x = 0$$

Cioè, tutti i punti che hanno ascissa nulla appartengono all'asse y.

3.1.2. *Equazione delle rette perpendicolari agli assi*

Una retta orizzontale ha i punti che sono tutti allineati alla stessa altezza, cioè hanno tutti la stessa ordinata:



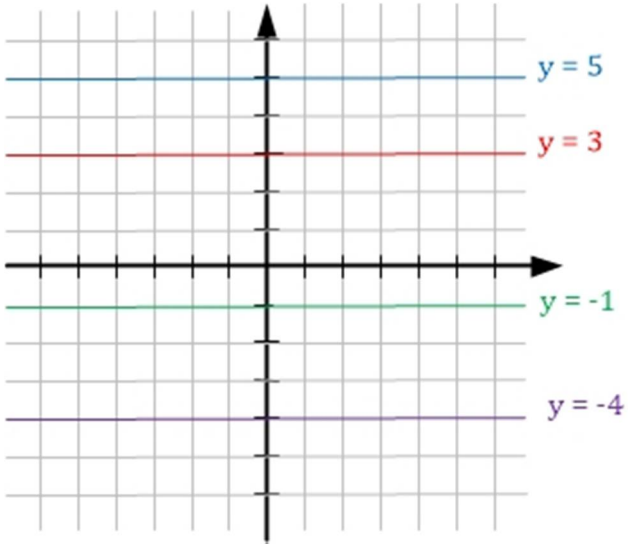
I punti che stanno sulla retta sono:

$$A(-5,3)$$
$$B(-3,3)$$
$$C(2,3)$$
$$D(6,3)$$

La caratteristica che hanno in comune è quella di avere ordinata pari a 3; quindi questa particolare retta avrà equazione:

$$y = 3$$

Se la retta si trovasse più in basso la sua equazione si modificherebbe:

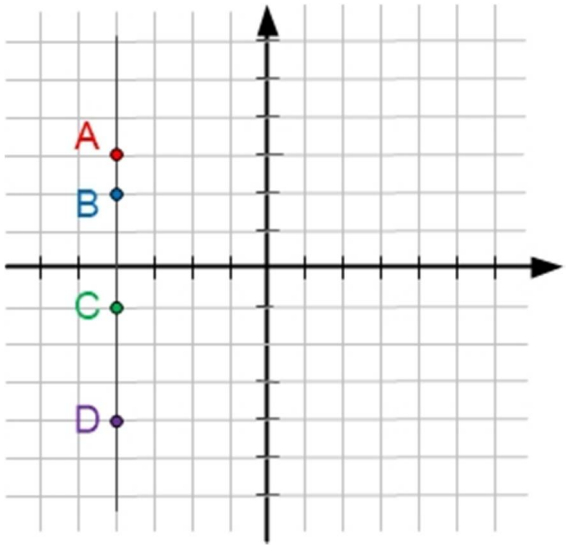


Dunque, **LA GENERICA ESPRESSIONE DI UNA RETTA ORIZZONTALE HA EQUAZIONE:**

$$y = c$$

Dove c è l'ordinata dei punti che appartengono alla retta.

Una retta verticale ha i punti che sono tutti allineati lungo la stessa linea verticale, cioè hanno tutti la stessa ascissa x:



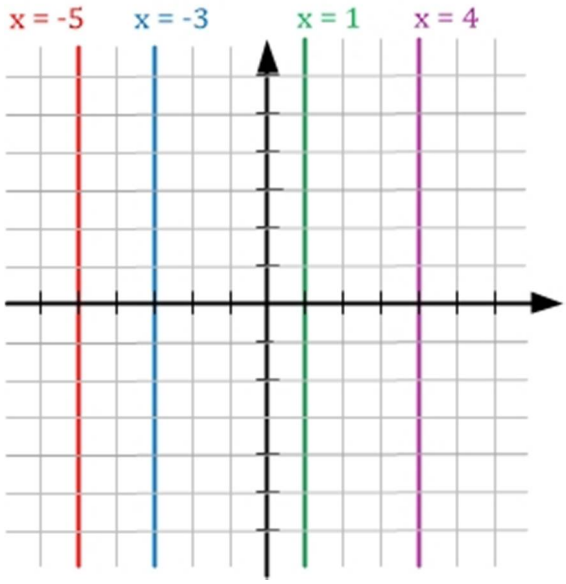
I punti che stanno sulla retta sono:

$$A(-4,3)$$
$$B(-4,2)$$
$$C(-4,-1)$$
$$D(-4,-4)$$

La caratteristica che hanno in comune è quella di avere ascissa pari a -4; quindi questa particolare retta avrà equazione:

$$y = -4$$

Se la retta si trovasse più a destra o più a sinistra la sua equazione si modificherebbe:



Dunque, **LA GENERICA ESPRESSIONE DI UNA RETTA ORIZZONTALE HA EQUAZIONE:**

$$x = c$$

Dove c è l'ordinata dei punti che appartengono alla retta.

3.2. *Equazione della retta generica*

Una retta può anche essere obliqua, avere cioè una certa inclinazione rispetto all'asse x.

Abbiamo detto che la generica retta si riconosce perché nella sua equazione compaiono solo le variabili x e y di primo grado. Abbiamo anche visto che nelle rette particolari (quelle parallele all'asse x o all'asse y) compare solo una delle variabili. L'importante è che ce ne sia almeno una e che non ce ne siano di grado superiore al primo.

Abbiamo anche visto che la generica retta ha equazione:

$$y = mx + q$$

Una retta però può anche non presentarsi con questa struttura.

Ad esempio:

$$3x + 2y - 1 = 0$$

È una retta. Infatti se dividiamo tutto per 2:

$$\frac{3x}{2} + \frac{2y}{2} - \frac{1}{2} = \frac{0}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{3}{2}x + y - 1 = 0$$

Cioè:

$$y = -\frac{3}{2}x + 1$$

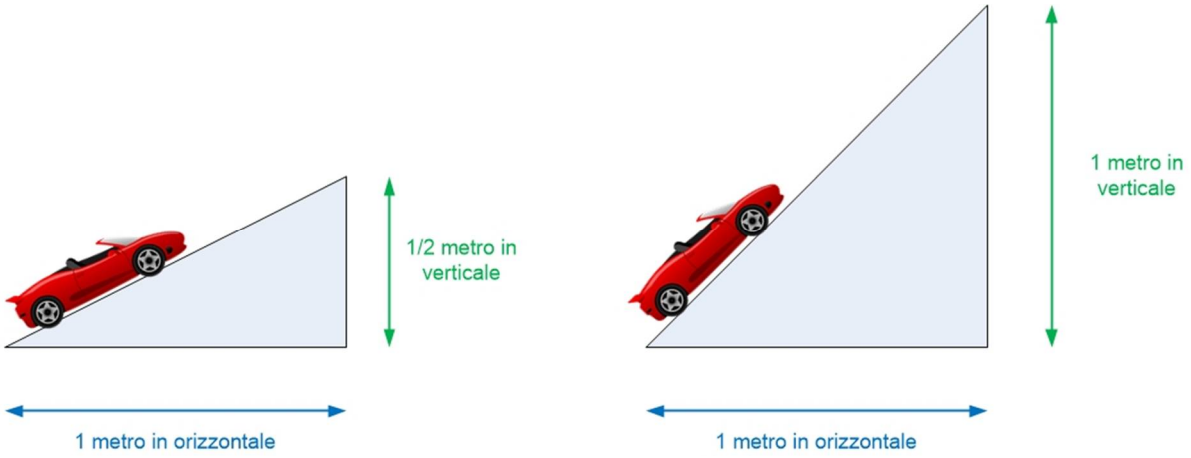
QUANDO LA RETTA SI PRESENTA COME $y = mx + q$ SI DICE CHE È SCRITTA IN FORMA ESPLICITA.

QUANDO SI PRESENTA COME $ax + by + c = 0$ SI DICE CHE È SCRITTA IN FORMA IMPLICITA.

Per capire come disegnare una retta generic nel piano cartesiano bisogna analizzare il significato dei termini m e q:

- m si chiama **COEFFICIENTE ANGOLARE** e indica l'**INCLINAZIONE** della retta sul piano cartesiano. Il coefficiente angolare è direttamente proporzionale all'angolo che la retta forma con l'asse x.

  Per capire cos'è l'inclinazione consideriamo una strada in salita. Più la strada è inclinata e più è ripida. Se la strada è molto ripida, significa che per ogni metro percorso in **orizzontale** ne percorriamo molti in **verticale**; se la strada è poco ripida significa che per ogni metro in orizzontale ne percorriamo pochi in verticale:

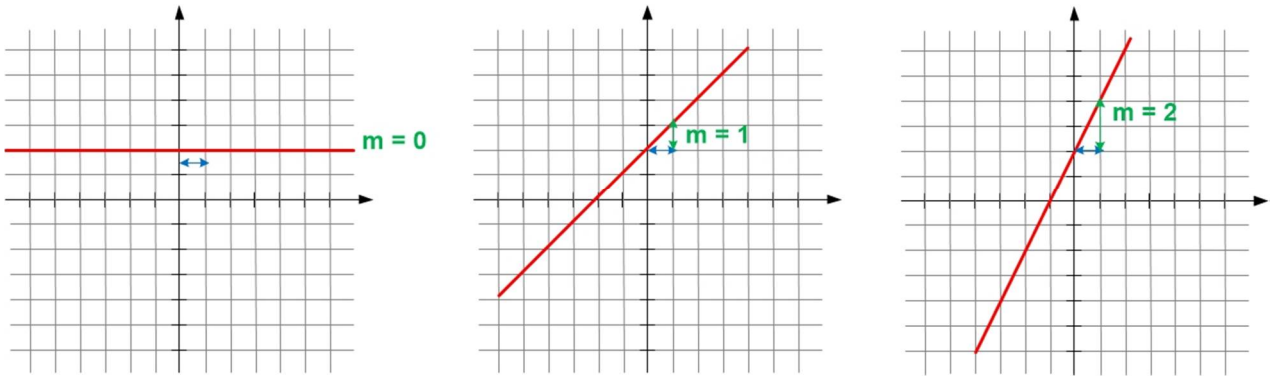


  L'**inclinazione** rappresenta il numero di metri percorsi in **verticale** per ogni metro percorso in orizzontale: nel primo caso, l'inclinazione è pari a $^1/_2$ perchè per ogni metro orizzontale saliamo di mezzo metro verticale; nel secondo caso, l'inclinazione è pari a 1 perchè per ogni metro orizzontale saliamo di un metro in verticale.

  Ora cerchiamo di tradurre in termini matematici questo discorso.

  Nel piano cartesiano, una retta è paragonabile ad una strada: se la retta è molto inclinata significa che per ogni unità orizzontale (nel piano cartesiano non possiamo parlare di metri) ne percorriamo molte in verticale.

  Dunque, se una retta ha **coefficiente angolare $m = 0$** significa che per ogni unità orizzontale ne percorriamo zero in verticale, cioè la retta è orizzontale (strada pianeggiante).



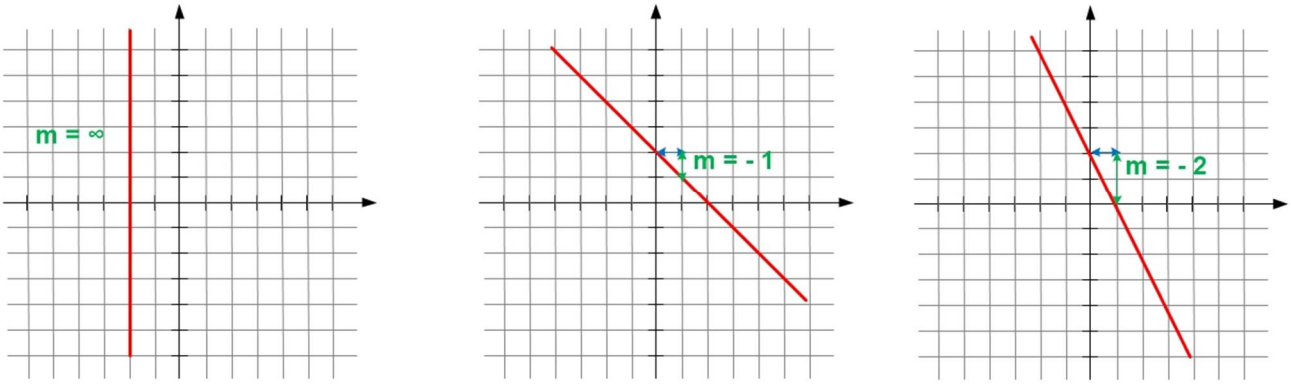
Se la retta ha **coefficiente angolare $m = 1$** significa che per ogni unità orizzontale ne percorriamo una in verticale.

Se la retta ha **coefficiente angolare $m = 2$** significa che per ogni unità orizzontale ne percorriamo 2 in verticale.

E quando la retta è verticale? Quanti metri percorriamo in verticale quando ci spostiamo anche di pochissimo in orizzontale? La risposta è infiniti… Dunque una retta verticale ha coefficiente angolare pari ad infinito e quindi non si può scrivere nell'equazione matematica (che è $x = c$).

Resta un ultima domanda: cosa succede se l'inclinazione è negativa?

La strada è in discesa…



Tutto questo può essere tradotto in linguaggio matematico, tutto questo si può scrivere come:

$$m = \frac{numero\ di\ unità\ verticali}{numero\ di\ unità\ orizzontali} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Il simbolo Δ è una lettera maiuscola dell'alfabeto greco e si legge delta. Indica una differenza, cioè una sottrazione tra due numeri:

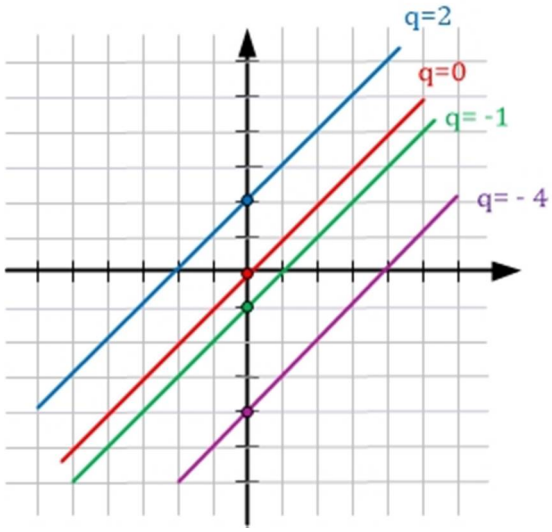
$$\Delta y = y_1 - y_2$$
$$\Delta x = x_1 - x_2$$

Nella formula del coefficiente angolare si utilizzano le differenze, perché il ragionamento che abbiamo fatto considerando una sola unità orizzontale è valido anche se ne consideriamo due. Ad esempio, se una retta ha inclinazione 3 significa che per ogni metro orizzontale ne percorriamo 3 verticali, ma significa anche che se percorriamo 2 metri orizzontali ne percorriamo 6 verticali.

Il rapporto tra i due intervalli è però costante:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = 3$$

- Il parametro q è chiamato **INTERCETTA ALL'ORIGINE** e indica la coordinata y del punto in cui la retta interseca l'asse y. Se $q = 0$ significa che la retta passa per l'origine degli assi; se $q = 1$ significa che al retta passa per il punto $(0,1)$; se $q = -2$ significa che la retta passa per il punto $(0, -2)$.



3.1.3. *Come si disegna una retta nel piano*

Per disegnare una retta data la sua espressione bisogna quindi:

a) Scrivere l'equazione della retta in forma esplicita
b) Indicare il punto in cui essa interseca l'asse y
c) Capire come la retta è inclinata

Partiamo da un esempio. Vogliamo disegnare nel piano la retta:

$$3x - y - 2 = 0$$

a) Scriviamo l'equazione della retta in forma esplicita:

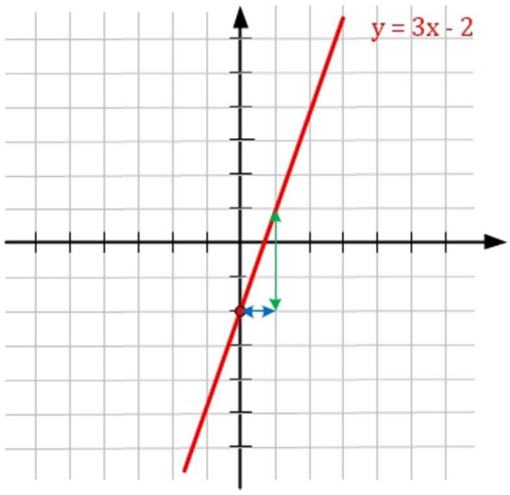
$$y = 3x - 2$$

b) Confrontando l'equazione della retta con l'espressione generica

$$y = mx + q$$

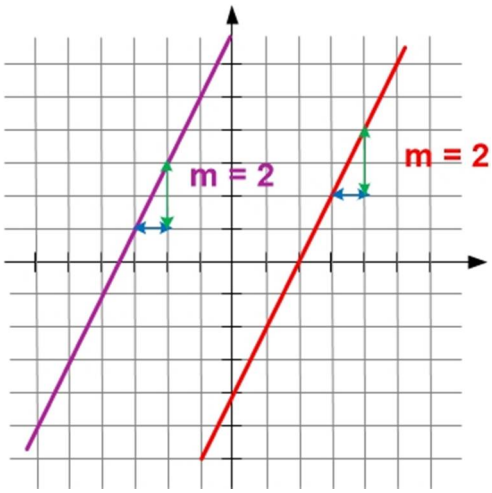
vediamo che $q = -2$ quindi la retta interseca l'asse y nel punto $(\mathbf{0}, \mathbf{-2})$

c) Confrontando l'equazione generica della retta con la nostra espressione vediamo che $m = 3$. Questo significa che per ogni **unità orizzontale** questa retta sale di **3 unità verticali**.



3.3. *Rette parallele e rette perpendicolari*

Da quanto visto finora risulta che **DUE RETTE PARALLELE HANNO LA STESSA INCLINAZIONE** e quindi lo stesso coefficiente angolare:



Ad esempio, le rette:

$$y = 3x - 5$$

$$y = 3x + 1$$

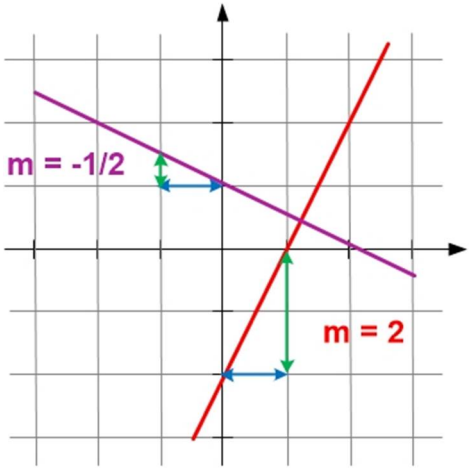
Sono parallele.

Invece per capire quanto vale il coefficiente angolare di una retta parallela ad un'altra dobbiamo ragionare un po' di più.

Consideriamo una **retta con coefficiente angolare $m = 2$** e disegniamo una **retta perpendicolare** a questa: la prima cosa che notiamo è che la retta perpendicolare ha un inclinazione negativa, quindi $m < 0$. Dal disegno possiamo poi notare che i coefficienti angolari delle due rette sono uno il reciproco dell'altro, cioè il numeratore e il denominatore sono invertiti:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{2}$$



Dunque, **I COEFFICIENTI ANGOLARI (m_A ED m_B) DI DUE RETTE PERPENDICOLARI TRA LORO SONO UNO L'ANTIRECIPROCO DELL'ALTRO:**

$$m_A = -\frac{1}{m_B}$$

4.DISEGNARE UNA CONICA

In questo capitolo impareremo a disegnare le coniche nel piano cartesiano a partire dalla loro equazione.

4.1. *La circonferenza*

La circonferenza è una curva chiusa che si ottiene conoscendo due dati:

- La **POSIZIONE DEL CENTRO**: si tratta di un punto, di solito chiamato **C**, di coordinate (x_C, y_C)
- Il **RAGGIO**: si tratta di una lunghezza, di solito indicata con la lettera **R**

Come abbiamo già visto, la generica circonferenza ha equazione:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$$

Quando sono noti i valori dei parametri a, b, c è nota l'equazione della circonferenza.

4.1.1. *Come disegnare una circonferenza nel piano cartesiano*

Per disegnare una circonferenza nel piano cartesiano data la sua equazione è necessario sapere ricavare dall'equazione le coordinate del centro e la lunghezza del raggio.

Per far questo si usano due formule:

$$\boldsymbol{x_C = -\frac{a}{2} \qquad y_C = -\frac{b}{2}}$$

$$\boldsymbol{R = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}}$$

Consideriamo come esempio la circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$$

I suoi parametri hanno valore:

$$a = 4$$

$$b = -8$$

$$c = -5$$

Da essi possiamo ricavare le coordinate del centro:

$$x_C = -\frac{a}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$y_C = -\frac{b}{2} = -\frac{-8}{2} = 4$$

Dunque il centro si trova in:

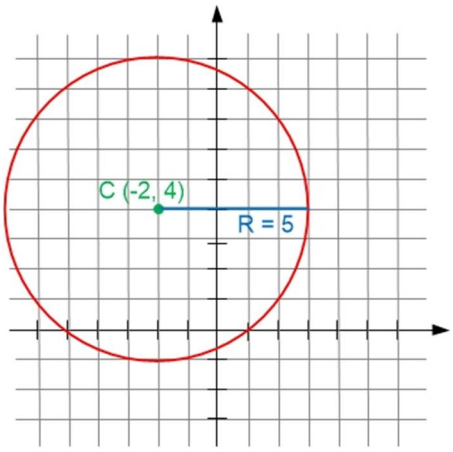
$$C(-2; 4)$$

Il raggio si ricava con la formula:

$$R = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \sqrt{4 + 16 + 5} = \sqrt{25} = 5$$

Dunque il raggio è lungo 5.

Adesso abbiamo tutti gli elementi per disegnare la circonferenza nel piano cartesiano:

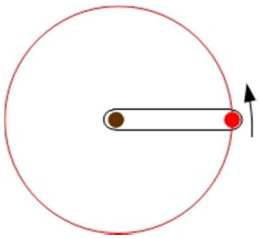


4.1.2. *La definizione analitica di circonferenza*

Quello che ci proponiamo di fare in queste paragrafo è ricavare una definizione di circonferenza. Per farlo ci possiamo domandare: quale caratteristica hanno in comune i punti che stanno sulla circonferenza?

La risposta è che stanno tutti alla stessa distanza dal centro. Per renderci conto di questa cosa immaginiamo di essere su una spiaggia e voler tracciare nella sabbia una circonferenza molto grande. Come possiamo fare?

Prendiamo un bastoncino e infiliamolo nella sabbia, nel punto in cui vogliamo che si trovi il centro della circonferenza. Quindi prendiamo una corda ripiegata su se stessa, chiusa all'estremità con un nodo. Facciamo passare un estremità della corda attorno al bastone e l'altra attorno al nostro dito. Quindi muoviamo il dito sulla sabbia in modo da tenere sempre tesa la corda. La figura tracciata sarà una circonferenza.



Dunque, una circonferenza nel piano cartesiano può essere definita come **IL LUOGO GEOMETRICO** (la circonferenza è appunto un luogo geometrico) **DEI PUNTI DEL PIANO EQUIDISTANTI** (cioè che hanno la stessa distanza) **DA UN PUNTO CHIAMATO CENTRO**.

4.2. *La parabola*

La parabola è una curva che si può disegnare conoscendo tre parametri:

- La **POSIZIONE DEL VERTICE**, cioè il punto di minimo (quello con la coordinata y minore) o di massimo (quello con la coordinata y maggiore). Di solito il vertice è indicato con la lettera V e ha coordinate (x_V, y_V)
- **CONCAVITÀ DELLA PARABOLA**: cioè se è rivolta all'insù (parabola che ride) o se è rivolta all'in giù (parabola che piange).
- Punto di **INTERSEZIONE CON L'ASSE** y.

Come abbiamo già visto, la generica parabola ha equazione:

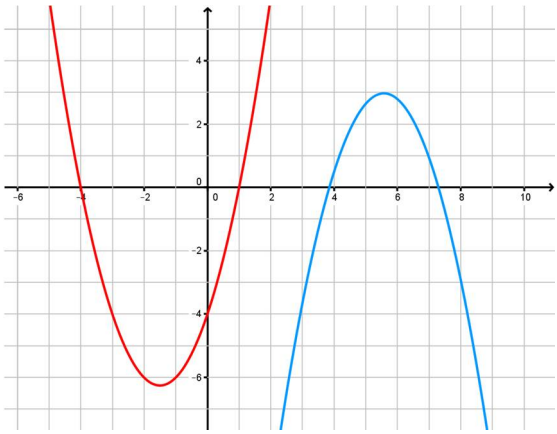
$$y = ax^2 + bx + c$$

Quando sono noti i valori dei parametri a, b, c è nota l'equazione della parabola.

4.2.1. *Come disegnare una parabola nel piano cartesiano*

Per disegnare una parabola nel piano cartesiano è necessario:

- Capire se il parametro a, cioè il coefficiente del termine di secondo grado, è positivo o negativo. Se $a > 0$ allora la parabola è rivolta all'insù e si dice che ha **CONCAVITÀ POSITIVA**; se $a < 0$ allora la parabola è rivolta all'in giù e si dice che ha **CONCAVITÀ NEGATIVA**:



- Capire in quelle punto la parabola interseca l'asse delle y. Questo punto è dato dal termine noto c. Il punto di intersezione con l'asse y infatti si ottiene quando l'ascissa è nulla ($x = 0$) e quindi:

$$y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$

- Trovare le coordinate del vertice $V(x_V, y_V)$ tramite le formule:

$$x_V = -\frac{b}{2a}$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Consideriamo come esempio la parabola di equazione:

$$y = -x^2 + 6x - 7$$

Questa parabola ha:

$$a = -1$$
$$b = 6$$
$$c = -7$$

Osservando il valore di a vediamo che la parabola è rivolta all'ingiù ($a = -1 < 0$); il termine $c = -7$ ci dice che la parabola interseca l'asse y in -7.

Infine possiamo calcolare le coordinate del vertice (che poiché la parabola è rivolta all'insù sarà un punto di minimo):

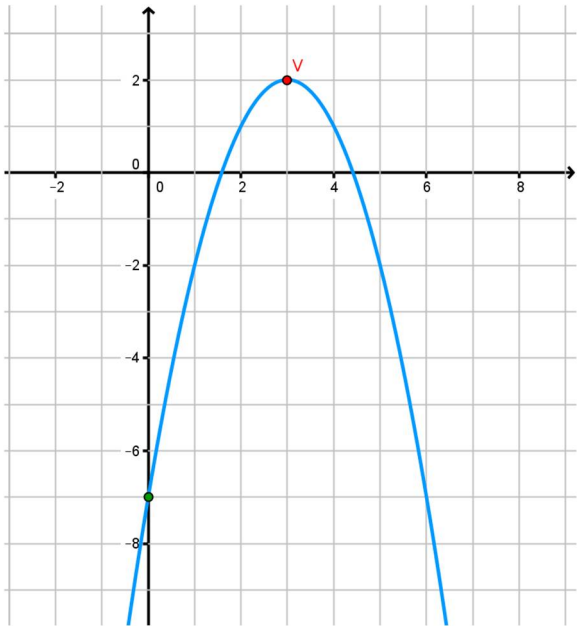
$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-1)} = -\frac{6}{-2} = 3$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{36 - 4(-1)(-7)}{4(-1)} = -\frac{36 - 28}{-4} = -\frac{8}{-4} = 2$$

Dunque il vertice ha coordinate:

$$V(3,2)$$

Ed ora possiamo disegnare la parabola nel piano cartesiano:



4.2.2. ***Definizione analitica di parabola***

La parabola è un po' più complessa della circonferenza. Per capire che cosa hanno in comune i punti che stanno su di essa dobbiamo studiare altri due parametri della parabola: il fuoco e la direttrice.

Il **FUOCO** di una parabola è un punto che si trova all'interno della curva, si indica con la lettera F e ha coordinate (x_F, y_F). E' possibile calcolare le sue coordinate con le formule seguenti:

$$x_F = -\frac{b}{2a}$$

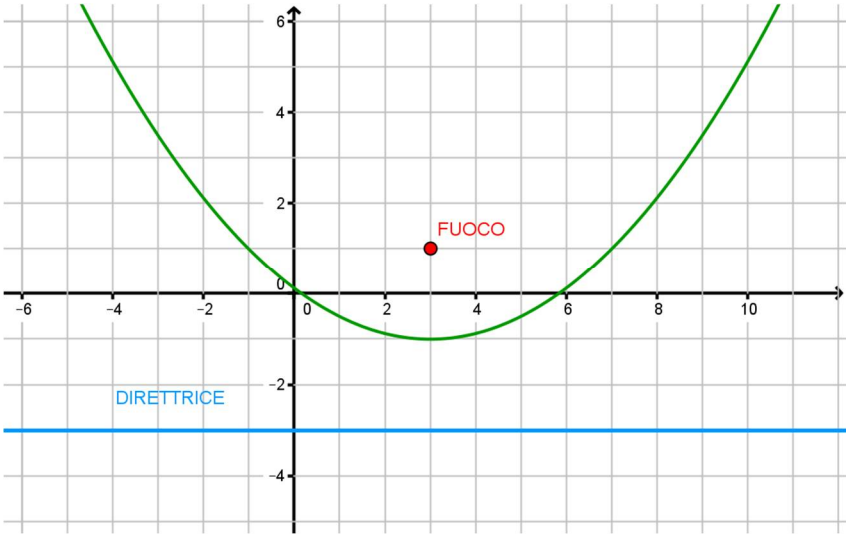
$$y_F = -\frac{1+\Delta}{4a}$$

La **DIRETTRICE** è una retta. Come dice la parola stessa, la direttrice stabilisce la direzione della parabola.

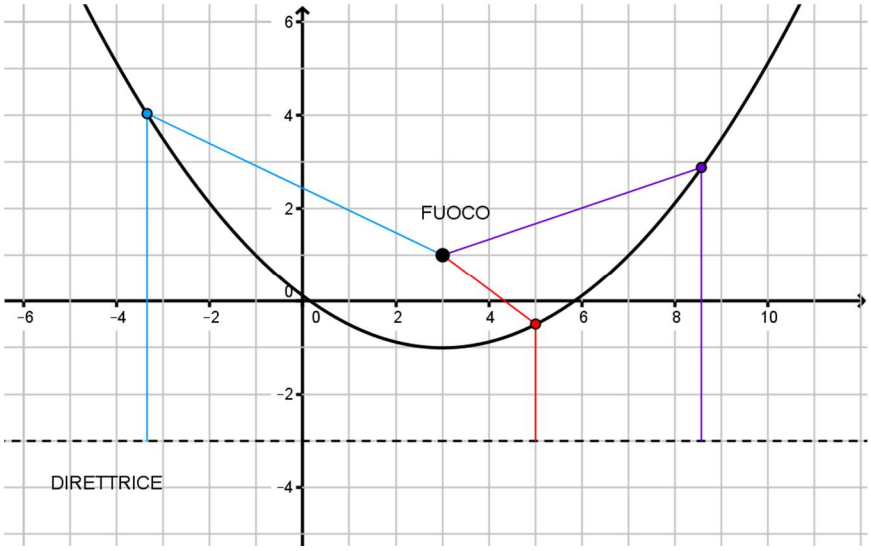
Nelle parabole che abbiamo studiato finora (che hanno l'asse, cioè la linea che le divide a metà, parallelo all'asse y) la direttrice è un retta orizzontale di equazione:

$$y = -\frac{1+\Delta}{4a}$$

In realtà esistono parabole che hanno la direttrice obliqua, ma la loro espressione matematica è più complessa e noi non le tratteremo.



La caratteristica che hanno i punti della parabola è di essere equidistanti dal fuoco e dalla direttrice:

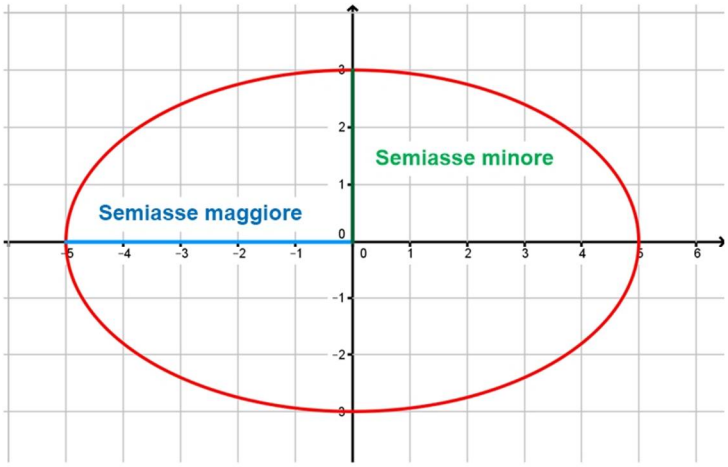


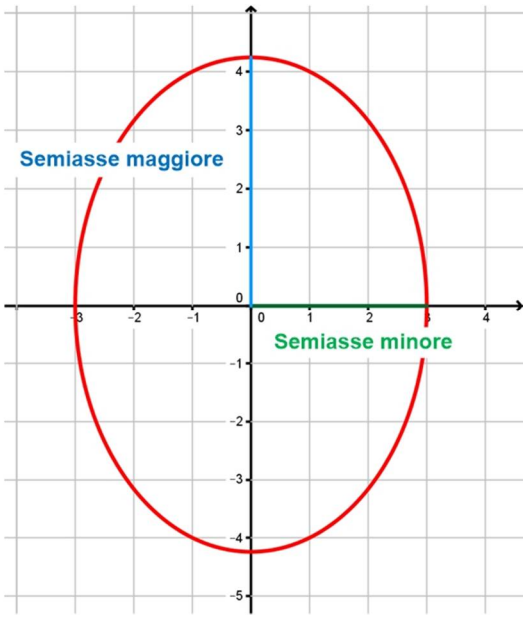
Dunque possiamo dire che **LA PARABOLA È IL LUOGO GEOMETRICO DEI PUNTI DEL PIANO EQUIDISTANTI DA UN PUNTO CHIAMATO FUOCO E DA UNA RETTA CHIAMATA DIRETTRICE**.

4.3. *L'ellisse*

L'ellisse è una curva chiusa. Per disegnarla bisogna conoscere:

- Il valore del **SEMIASSE MAGGIORE**: si tratta della lunghezza del diametro maggiore dell'ellisse.
- Il valore del **SEMIASSE MINORE**: si tratta della lunghezza del diametro minore dell'ellisse.





In generale un ellisse può essere posizionata in qualunque modo nel piano cartesiano. Noi però studieremo solo due tipi di ellisse: quella che ha l'asse maggiore lungo l'asse x e quella che ha l'asse maggiore lungo l'asse y.

Come abbiamo visto, l'equazione dell'ellisse è:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Quando sono noti i valori di a e b è nota l'ellisse.

4.3.1. *Come disegnare un ellisse nel piano cartesiano*

Il semiasse maggiore e il semiasse minore si trovano tramite i coefficienti a e b che nell'equazione dell'ellisse compaiono al quadrato.

In particolare, il più grande tra i due indica il semiasse maggiore mentre il più piccolo indica il semiasse minore.

Per calcolarne il valore è sufficiente considerare che:

$$se\ a > b \quad \rightarrow \quad a = semiasse\ maggiore;\ b = semiasse\ minore$$

$$se\ a < b \quad \rightarrow \quad a = semiasse\ minore;\ b = semiasse\ maggiore$$

Poiché nell'espressione i termini a e b sono al quadrato è necessario passarli sotto radice:

$$a = \sqrt{a^2} \qquad b = \sqrt{b^2}$$

Consideriamo come esempio l'ellisse:

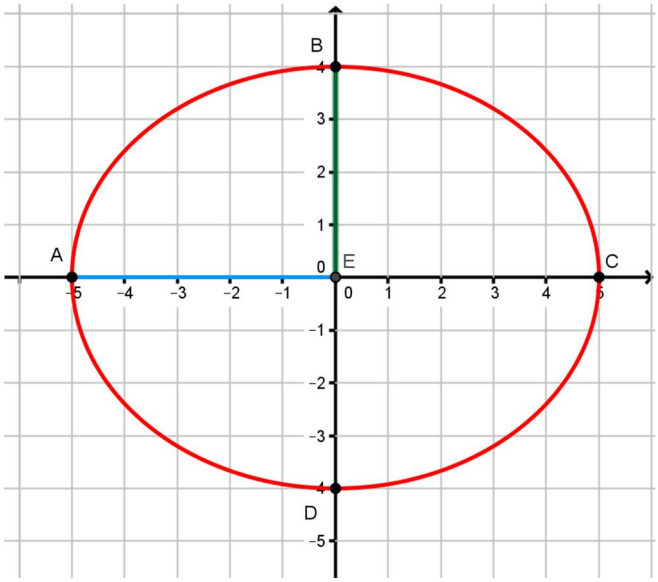
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Confrontando l'equazione con quella generica vediamo che:

$$a^2 = 25 \qquad a = \sqrt{25} = 5 \qquad semiasse\ maggiore$$

$$b^2 = 16 \qquad b = \sqrt{16} = 4 \qquad semiasse\ minore$$

Per capire quale dei due semiassi è orizzontale e quale verticale basta guardare dove si trovano i due parametri: nel nostro esempio il parametro che indica il semiasse maggiore (a) si trova sotto alla variabile x e quindi l'ellisse ha il semiasse maggiore orizzontale (giace sull'asse x). Invece il parametro che indica il semiasse minore (b) si trova sotto alla variabile y. Questo vuole dire che il semiasse minore giace sull'asse y. A questo punto possiamo individuare gli estremi dell'ellisse e disegnarla:

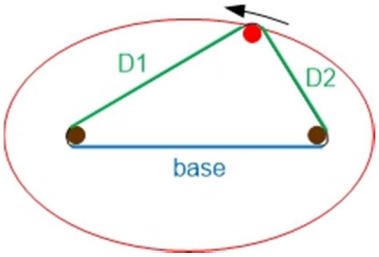


4.3.2. ***Definizione analitica di ellisse***

Cerchiamo ora di capire quale caratteristica hanno in comune i punti che stanno sull'ellisse.

Per capirlo immaginiamo di voler tracciare nella sabbia un ellisse, come abbiamo fatto prima per la circonferenza.

Per tracciare un ellisse abbiamo bisogno di due bastoncini (per la circonferenza era uno solo). Piantiamo i bastoncini nella sabbia ad un certa distanza l'uno dall'altro. Quindi prendiamo la corda e la facciamo passare attorno ai due bastoni formando un triangolo:



La lunghezza della corda è costante, quindi possiamo dire che il perimetro del triangolo non cambia. Uno dei lati (quello che unisce i due bastoni, la base) è costante e questo vuol dire la somma degli altri due lati (cioè delle distanze dei punti dai due bastoni $D1 + D2$) è costante:

$$2P = costante$$

$$2P = D1 + D2 + base$$

Ad esempio, se la base è lunga 10 e il perimetro vale 20:

$$D1 + D2 + 10 = 20$$

I lati $D1$ e $D2$ possono variare, ma la loro somma deve sempre essere pari a 10…

Dunque i punti che stanno sull'ellisse hanno costante la somma delle distanze dai due bastoni.

In matematica, i due punti in cui sono stati posizionati i bastoni si chiamano **FUOCHI DELL'ELLISSE**, si indicano con la lettera F e hanno coordinate $(x_F,\ y_F)$.

I fuochi stanno sempre sul semiasse maggiore, alla stessa distanza dall'origine degli assi.

Per trovare le coordinate del fuoco è necessario usare la formula seguente:

$$c = \sqrt{|a^2 - b^2|}$$

Se l'ellisse ha il semiasse maggiore sull'asse x i fuochi avranno coordinate:

$$F_1(c, 0)$$

$$F_2(-c, 0)$$

Se invece l'ellisse ha il semiasse maggiore sull'asse y i fuochi avranno coordinate

$$F_1(0, c)$$

$$F_2(0, -c)$$

Un altro parametro importante dell'ellisse, anche se non serve per disegnarla, è l'**ECCENTRICITÀ**. L'eccentricità si indica con la lettera e ed è un numero che indica quanto l'ellisse è schiacciata: un ellisse con bassa eccentricità è simile ad un circonferenza mentre un ellisse con grande eccentricità si allunga sempre di più.

L'eccentricità si calcola con la formula seguente:

$$e = \frac{c}{semiasse\ maggiore}$$

Dunque, **L'ELLISSE È IL LUOGO GEOMETRICO DEI PUNTI DEL PIANO PER CUI È COSTANTE SOMMA DELLE DISTANZE DA DUE PUNTI CHIAMATI FUOCHI**.

4.4. *L'iperbole*

L'iperbole è una curva aperta molto particolare per due motivi:

- E' una **CURVA DOPPIA**, cioè presenta due parti simmetriche;

- Man mano che ci si allontana dal vertice, cioè dal punto più vicino all'origine, l'iperbole diventa sempre più rettilinea. In realtà non diventa mai davvero rettilinea: ci sarà sempre una curvatura, anche se man mano che ci si allontana dal vertice la curvatura diventa tanto piccola da essere trascurabile. La retta a cui l'iperbole si avvicina sempre più è chiamata **ASINTOTO**.

  L'iperbole ha due asintoti, anch'essi simmetrici.

  L'iperbole è l'unica conica ad avere gli asintoti, ma esistono molte altre funzioni che diventano quasi rettilinee.

Per disegnare l'iperbole è necessario conoscere:

- Come sono fatti i due asintoti
- Quali sono i vertici dell'iperbole.

Sappiamo che l'equazione dell'iperbole è:

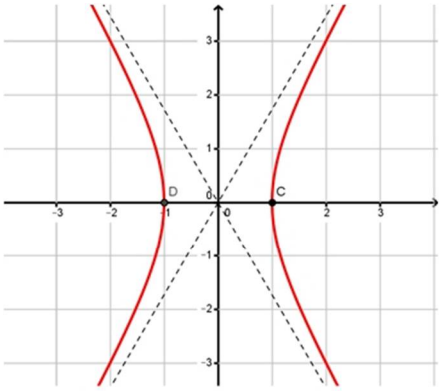
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se sono noti i parametri a e b allora è nota anche l'iperbole.

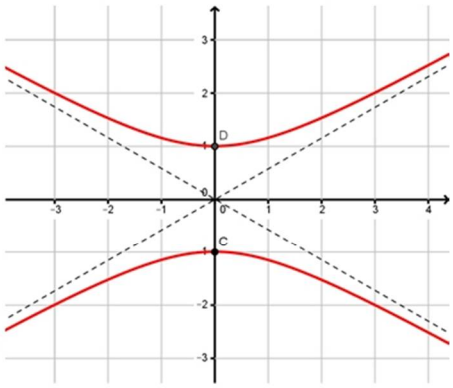
4.4.1. *Come si disegna l'iperbole nel piano cartesiano*

L'iperbole che abbiamo studiato finora è simmetrica rispetto all'asse y. Un iperbole di questo tipo si riconosce perché il temine noto nella sua equazione è 1.

Se l'iperbole fosse simmetrica rispetto all'asse x al posto di 1 troveremmo -1.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Gli asintoti sono due rette passanti per l'origine, quindi hanno equazione:

$$y = mx + q$$

Dove:

$$q = 0$$

$$m = \pm\frac{b}{a}$$

Un asintoto sarà quindi:

$$y = \frac{b}{a}x$$

E l'altro:

$$y = -\frac{b}{a}x$$

L'iperbole ha due vertici che si trovano o sull'asse x (parabola classica che abbiamo visto finora) o sull'asse y (parabola con temine noto pari a -1). Le loro coordinate si trovano osservando il temine che compare al denominatore sotto alla variabile dell'asse su cui si trovano i vertici:

$$Se\ l'iperbole\ ha\ i\ vertici\ sull'asse\ x \quad \rightarrow \quad V(\pm a, 0)$$

$$Se\ l'iperbole\ ha\ i\ vertici\ sull'asse\ y \quad \rightarrow \quad V(0, \pm b)$$

Ad esempio, consideriamo l'iperbole seguente:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Quest'iperbole ha i vertici sull'asse x (il termine noto è pari a 1).

Inoltre:

$$a^2 = 4 \qquad a = \sqrt{4} = 2$$

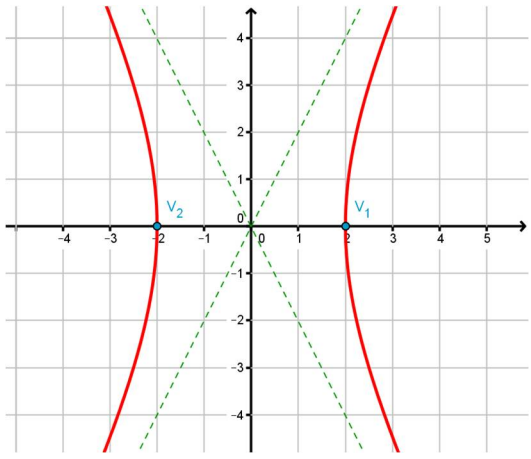
$$b^2 = 16 \qquad b = \sqrt{16} = 4$$

Le coordinate dei vertici (che stanno sull'asse x) si ricavano dal parametro sotto alla variabile x, cioè il termine a. Dunque:

$$V(\pm 2,0)$$

Gli asintoti si ricavano con le formule:

$$y = \pm\frac{4}{2}x \quad \rightarrow \quad y = \pm 2x$$



4.4.2. *Definizione analitica di iperbole*

Anche per l'iperbole è necessario definire due punti, chiamati **FUOCHI**.

I fuochi sono allineati con i vertici, quindi se l'iperbole ha i vertici sull'asse x avrà anche i fuochi sull'asse x; se invece ha i vertici sull'asse y avrà anche i fuochi sull'asse y.

La formula per il calcolo dei fuochi è:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

E i fuochi hanno coordinate:

$$Se\ l'iperbole\ ha\ i\ vertici\ sull'asse\ x \quad \rightarrow \quad F(\pm c, 0)$$
$$Se\ l'iperbole\ ha\ i\ vertici\ sull'asse\ y \quad \rightarrow \quad F(0, \pm c)$$

Qualunque punto dell'iperbole si consideri, se si calcola la differenza delle distanze dai fuochi ($D1 - D2$), si ottiene lo stesso risultato.

Dunque, **L'IPERBOLE È IL LUOGO GEOMETRICO DEI PUNTI DEL PIANO PER I QUALI È COSTANTE LA DIFFERENZA DELLE DISTANZE DA DUE PUNTI CHIAMATI FUOCHI**.

Anche l'iperbole, come l'ellisse, può essere più o meno schiacciata in base all'inclinazione degli asintoti. Per indicare quando l'iperbole è schiacciata si utilizza l'eccentricità che si calcola con la formula seguente:

$$e = \frac{c}{a}$$

DEFINIZIONE ANALITICA	EQUAZIONE	CARATTERISTICHE
CIRCONFERENZA Luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto chiamato centro	$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$	$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ $R = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - C}$
PARABOLA Luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto chiamato Fuoco e da una retta chiamata direttrice	$y = ax^2 + bx + c$	$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ $F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$ $y = -\frac{1+\Delta}{4a}$
ELLISSE Luogo geometrico dei punti del piano per cui è costante la somma delle distanze da due punti chiamati fuochi	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c = \sqrt{\lvert a^2 - b^2 \rvert}$ $F_x(\pm c, 0) \quad F_y(0, \pm c)$ $e = \frac{c}{semiasse\ maggiore}$
IPERBOLE Luogo geometrico dei punti del piano per cui è costante la differenza delle distanze da due punti chiamati fuochi	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $V_x(\pm a, 0) \quad V_y(0, \pm b)$ $F_x(\pm c, 0) \quad F_y(0, \pm c)$ $y = -\frac{b}{a}x$ $e = \frac{c}{a}$

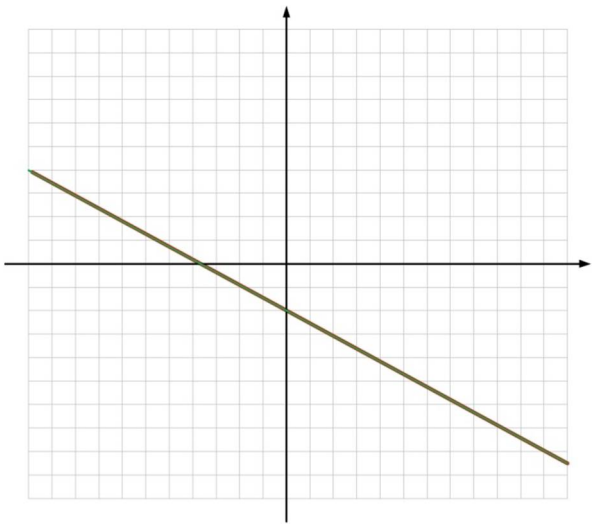
5.POSIZIONI RECIPROCHE E FASCI DI CONICHE

Nel capitolo precedente abbiamo visto come disegnare nel piano cartesiano una conica e come calcolare le sue caratteristiche data l'equazione.
Adesso ci domandiamo che relazione può esserci tra due coniche. Ci chiediamo ad esempio in quali condizioni una retta interseca una circonferenza e così via.

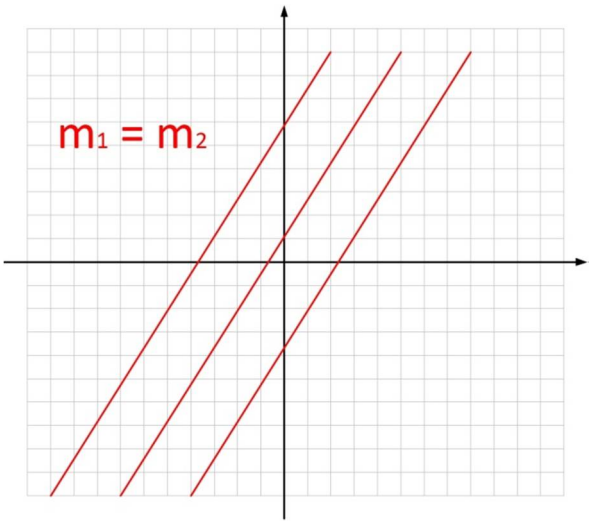
5.1. *Relazioni tra rette*

Due rette possono essere:

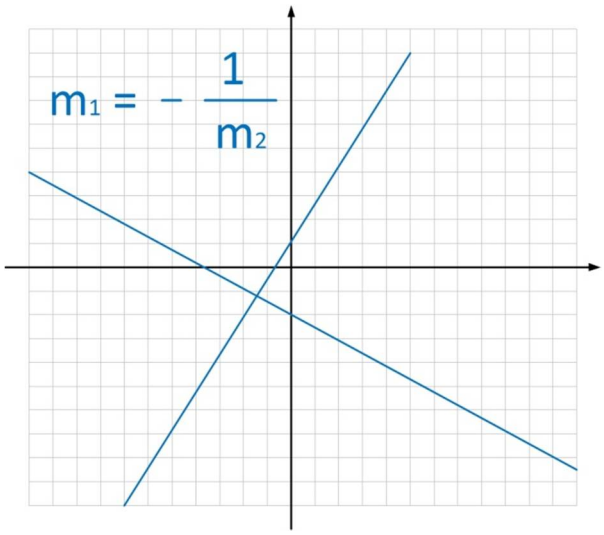
- **COINCIDENTI**: cioè sono l'una sovrapposta all'altra. In questo caso hanno la stessa equazione.



- **PARALLELE**: due rette parallele hanno lo stesso coefficiente angolare



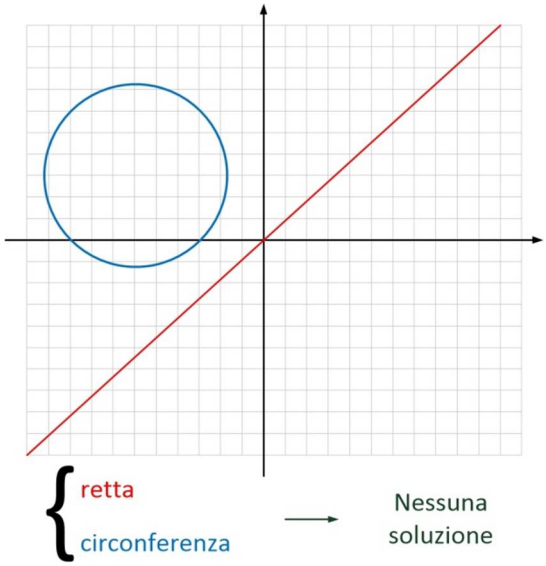
- **PERPENDICOLARI**: due rette perpendicolari hanno i coefficienti angolari che sono uno l'antireciproco dell'altro.



5.2. *Relazioni tra retta e coniche*

Una retta e una conica possono essere:

- **ESTERNE**: cioè la retta non tocca la conica in nessun punto. Se si fa il sistema tra retta e conica non si ottengono risultati.



Ad esempio, la retta $y = x$ e la circonferenza $x^2 + y^2 + 12x - 6y + 27 = 0$ sono esterne perchè:

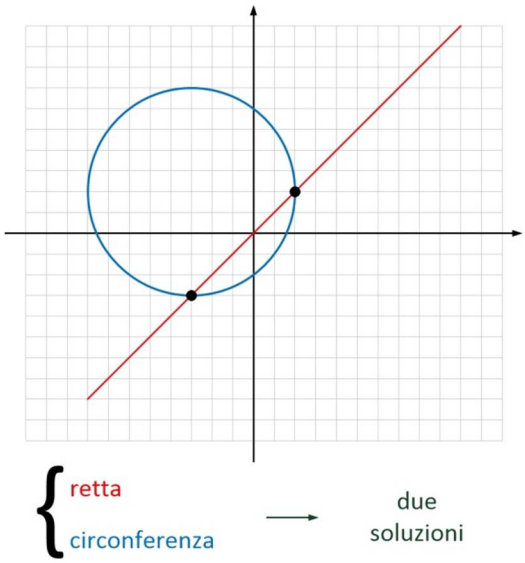
$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 + 12x - 6y + 27 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 + x^2 + 12x - 6x + 27 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x^2 + 6x - 27 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x \\ 2x^2 + 6x - 27 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ x_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 216}}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ \nexists x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Il sistema non ha soluzioni perchè l'equazione di secondo grado che ne risulta ha il delta negativo.

- **SECANTI**: la retta interseca la conica in due punti. Solo nel caso della parabola esiste la possibilità che la retta intersechi la conica in uno solo punto, quando la retta è parallela all'asse delle y; nel

caso delle curve chiuse o doppie (elisse, circonferenza e iperbole) ci saranno sempre due intersezioni.



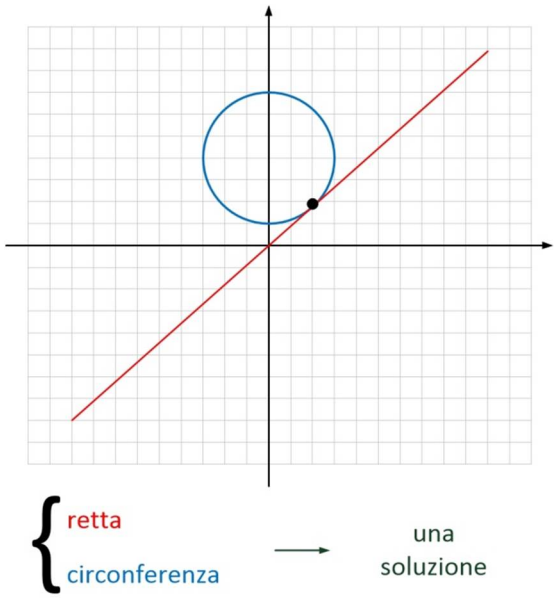
Ad esempio, la retta $y = x$ e la circonferenza $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$ sono secanti perchè:

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 + x^2 + 6x - 4x - 12 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x^2 + 2x - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x \\ 2x^2 + 2x - 12 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 48}}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \quad V \quad y_2 = -3 \\ x_1 = 2 \quad V \quad x_2 = -3 \end{cases}$$

Il sistema ha 2 soluzioni perchè l'equazione di secondo grado che ne risulta ha il delta positivo.

- **TANGENTI**: cioè la retta tocca la conica in un solo punto. Se si fa il sistema tra retta e conica si ottiene una sola soluzione (anche se l'equazione di una conica è sempre di secondo grado e quindi si dovrebbero avere due soluzioni). In pratica le due soluzioni sono coincidenti.



Ad esempio, la retta $y = x$ e la circonferenza $x^2 + y^2 - 8y + 8 = 0$ sono tangenti perchè:

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 - 8y + 8 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 + x^2 - 8x + 8 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x^2 - 8x + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x \\ x_{1,2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

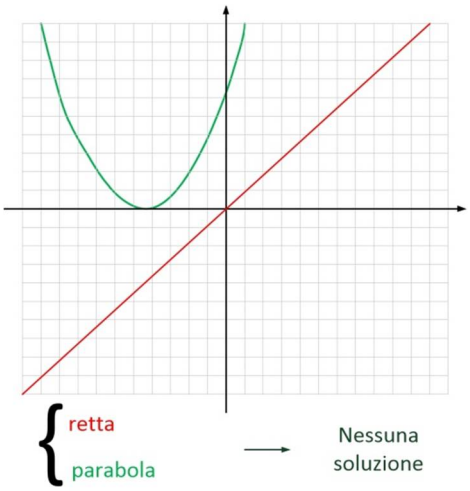
Il sistema ha 1 soluzione perchè l'equazione di secondo grado che ne risulta ha il delta nullo.

Lo stesso ragionamento si può fare con l'ellisse o con l'iperbole.

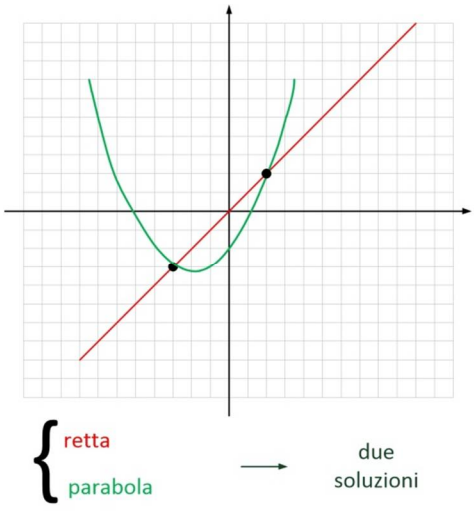
5.3. *Relazioni tra retta e parabola*

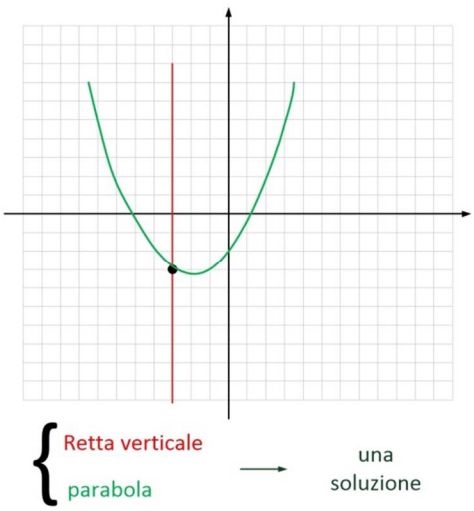
Una parabola è una conica possono essere:

- **ESTERNE**: cioè la retta non tocca la conica in nessun punto. Se si fa il sistema tra retta e conica non si ottengono risultati.

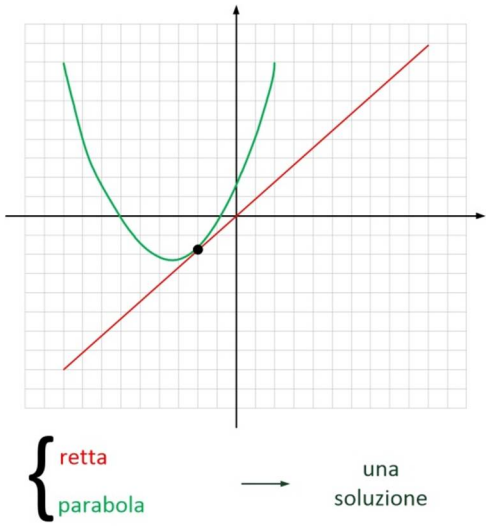


- **SECANTI**: la retta interseca la conica in due punti. Solo nel caso della parabola esiste la possibilità che la retta intersechi la conica in uno solo punto, quando la retta è parallela all'asse delle y; nel caso delle curve chiuse o doppie (elisse, circonferenza e iperbole) ci saranno sempre due intersezioni.





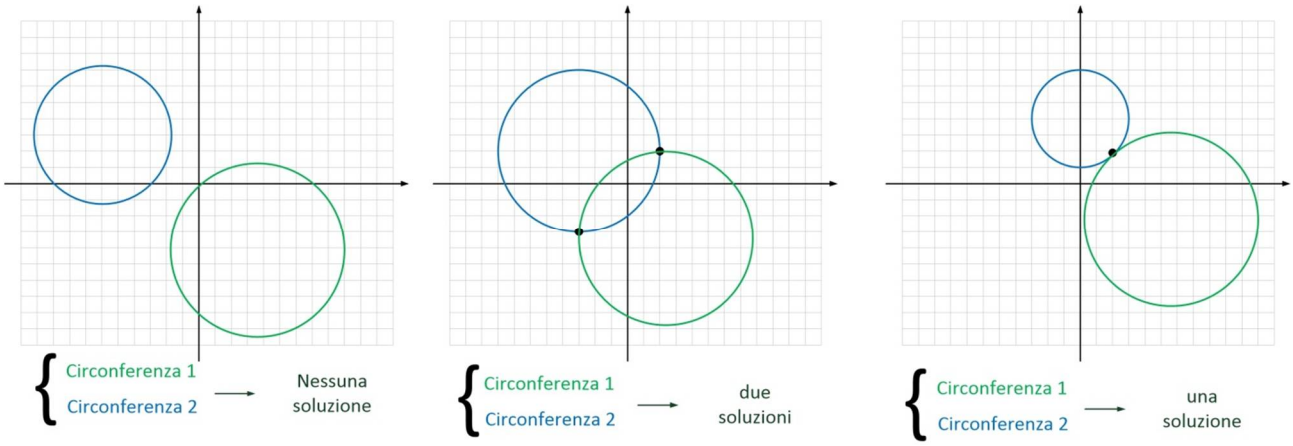
- **TANGENTI**: cioè la retta tocca la conica in un solo punto. Se si fa il sistema tra retta e conica si ottiene una sola soluzione (anche se l'equazione di una conica è sempre di secondo grado e quindi si dovrebbero avere due soluzioni). In pratica le due soluzioni sono coincidenti.



5.4. *Relazioni tra coniche*

E' possibile intersecare anche due coniche nello stesso modo. Le coniche hanno equazioni di secondo grado, quindi se le mettiamo a sistema possiamo ottenere:

- **DUE SOLUZIONI**: se le coniche si intersecano in due punti, cioè sono **SECANTI**. Questo è il caso in cui il delta dell'equazione di secondo grado che ne risulta è maggiore di zero.
- **UNA SOLUZIONE**: se le coniche si toccano in un solo punto, cioè sono **TANGENTI**. Questo è il caso in cui il delta dell'equazione di secondo grado che ne risulta è nullo.
- **ZERO SOLUZIONI**: se le coniche non si toccano, cioè sono **ESTERNE**. Questo è il caso in cui il delta dell'equazione di secondo grado che ne risulta è minore di zero.



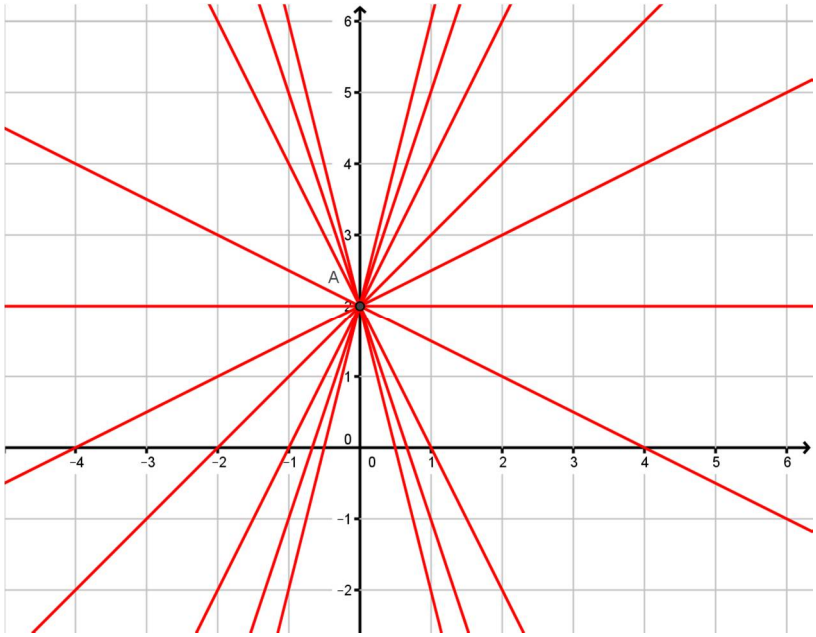
Dunque, riassumendo: **DUE CONICHE SONO SECANTI SE, MESSE A SISTEMA, DANNO DUE RISULTATI (UNO NEL CASO DELLA PARABOLA E DELLA RETTA VERTICALE); DUE CONICHE SONO TANGENTI SE MESSE A SISTEMA DANNO UN SOLO RISULTATO; DUE CONICHE SONO ESTERNE SE MESSE A SISTEMA NON DANNO RISULTATI**.

5.5. *I fasci di rette*

La retta ha due parametri m e q. Se decidiamo di fissare il valore di uno dei due parametri otteniamo un insieme di rette particolari.

Ad esempio, se decidiamo di fissare il valore di q otteniamo delle rette che passano tutte per lo stesso punto e che hanno differenti coefficienti angolari:

$$y = mx + 2$$

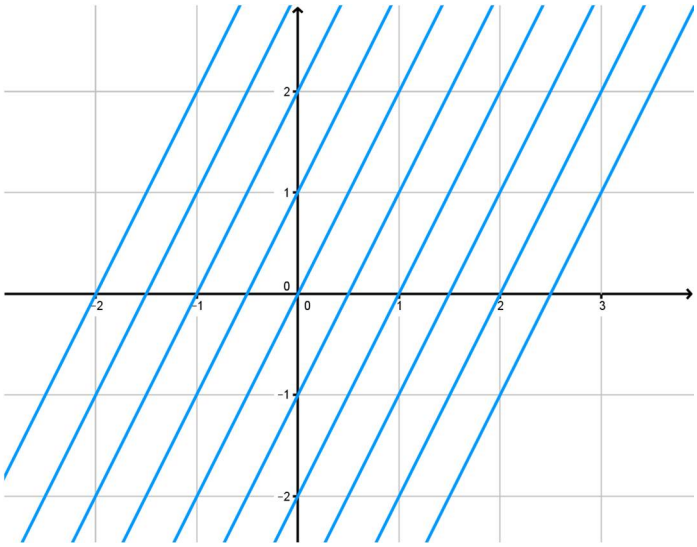


Un insieme di rette (infinite rette) che passano tutte per uno stesso punto, ma che hanno differente coefficiente angolare si chiama **FASCIO DI RETTE PROPRIO**. Il punto che esse hanno in comune si chiama **CENTRO DEL FASCIO** o **SOSTEGNO DEL FASCIO**.

Naturalmente il sostegno del fascio non deve per forza stare sull'asse y: il punto potrebbe avere coordinate qualunque, ma in questo caso l'equazione si complica perché il parametro viene moltiplicato ad entrambe le variabili x e y.

Se invece stabiliamo che il coefficiente angolare di una retta è costante, abbiamo una serie infinita di rette tutte parallele:

$$y = 2x + q$$



Un gruppo di rette tutte parallele viene chiamato **FASCIO DI RETTE IMPROPRIO**.

I fasci di rette hanno un equazione che presenta un parametro, di solito indicato con la lettera k, λ ecc...

Esempi di equazioni di fasci sono:

$$2x + y - 2 + k(x + y + 1) = 0$$

$$kx + 2y - 5 = 0$$

$$(\lambda + 2)x - \lambda y + 4\lambda - 1 = 0$$

Al variare del valore del parametro si ottengono tutte le rette del fascio.

Per capire se il fascio di rette è proprio o improprio bisogna calcolare il coefficiente angolare e vedere se contiene dei parametri: se li contiene vuol dire che l'inclinazione delle rette non è fissa e quindi il fascio è proprio; se invece è un numero fisso significa che il fascio è improprio.

Per trovare il centro di un fascio proprio basta assegnare al parametro due valori in modo da ottenere due rette ed intersecarle: le rette di un fascio infatti si intersecano tutte nel sostegno.

ESEMPIO 1: dato il fascio di rette $x + y + 3 + \lambda(3x - y + 5) = 0$ dire se è proprio o improprio e rappresentarlo nel piano cartesiano.

Raccogliamo le variabili x e y in modo da scrivere questo fascio in forma esplicita:

$$x + y + 3 + \lambda(3x - y + 5) = 0 \quad \rightarrow \quad x + y + 3 + 3\lambda x - \lambda y + 5\lambda = 0$$

$$(1 + 3\lambda)x + (1 - \lambda)y + 3 + 5\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1 + 3\lambda}{1 - \lambda}x + \frac{-3 - 5\lambda}{1 - \lambda}$$

Dunque il coefficiente angolare è:

$$m = \frac{1 + 3\lambda}{1 - \lambda}$$

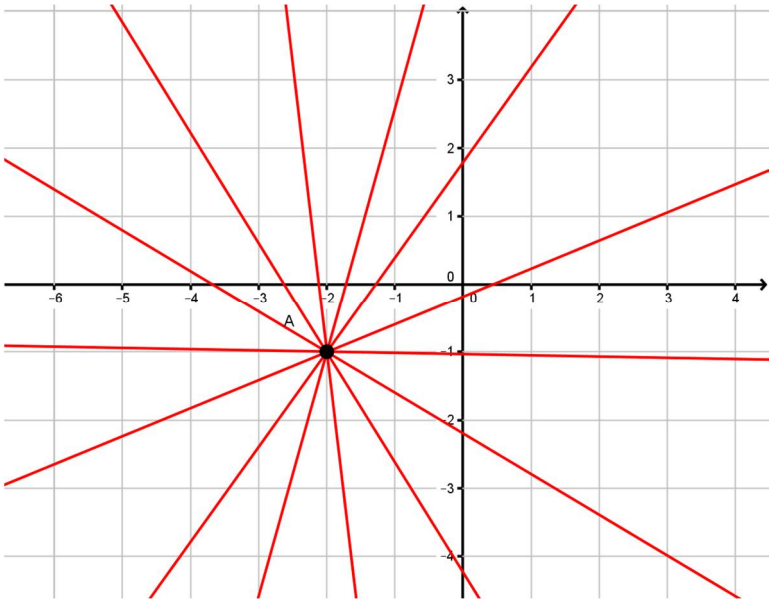
e possiamo concludere che il fascio è proprio.

Per disegnare il fascio dobbiamo trovare il suo centro. Visto che le varie rette del fascio si ottengono dando un valore al parametro, per trovare il punto in cui si intersecano scegliamo due rette qualunque e mettiamole a sistema.

Ad esempio, possiamo scegliere la retta che corrisponde a $\lambda = 0$, cioè: $x + y + 3 = 0$ e la retta corrispondente a $\lambda = -1$, cioè $-2x + 2y - 2 = 0$. Mettendole a sistema troviamo la loro intersezione:

$$\begin{cases} y = -x - 3 \\ -2x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -x - 3 \\ -2x - 2x - 6 - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -x - 3 \\ -4x = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Quindi questo fascio ha centro in $(-2; -1)$.

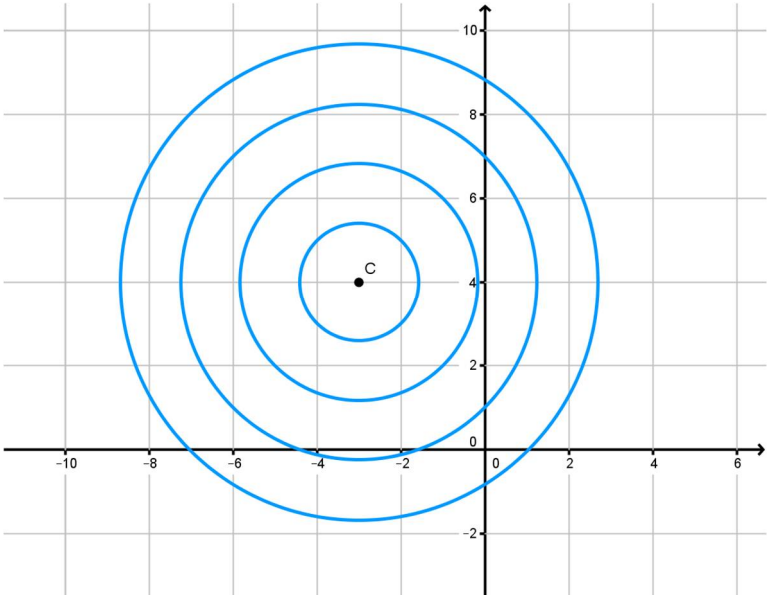


5.6. *Fasci di circonferenze*

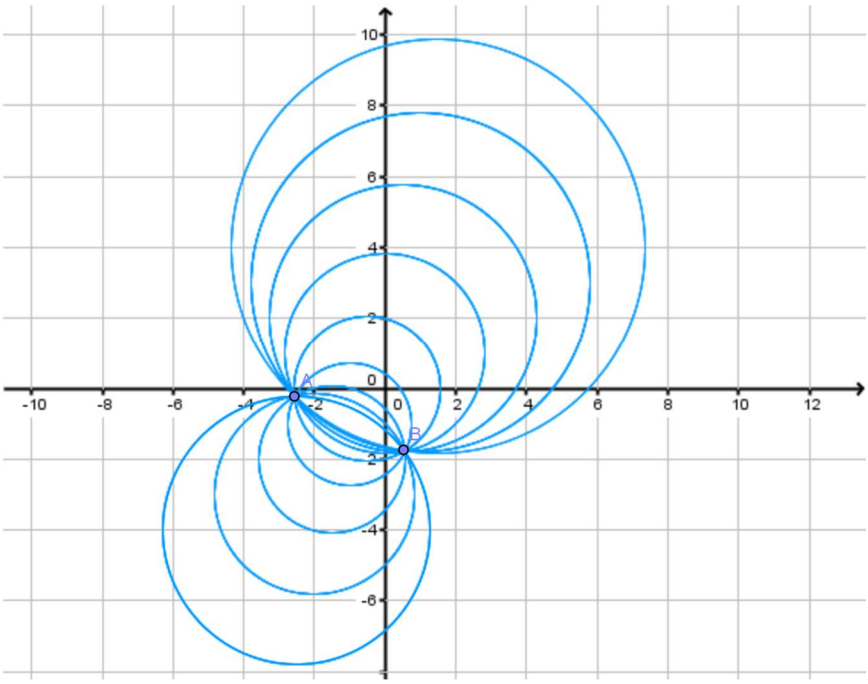
Anche le coniche possono contenere un parametro. Ad esempio una circonferenza in cui il parametro c non è esplicitato da origine ad un insieme di circonferenze tutte con lo stesso centro. In questo caso si parla di fascio di circonferenze concentriche.

Ad esempio:

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y + c = 0$$



Se il parametro coinvolge anche le coordinate del centro, otteniamo un insieme di infinite circonferenze che passano tutte per due punti:



In generale ogni volta che all'interno dell'equazione di una conica compare un parametro, siamo in presenza di un fascio, cioè di un insieme di curve che variano al variare del parametro. Per capire come è fatto il fascio dobbiamo capire quali caratteristiche della curva sono influenzate dal parametro.

Ad esempio, se il parametro coinvolge solo il raggio di un circonferenza avremo una fascio di circonferenze concentriche; se il parametro coinvolge il coefficiente angolare della retta avremo un fascio di rette proprio.

6.SCRITTURA DELLE EQUAZIONI DELLE CONICHE

Per scrivere l'equazione di una conica è necessario trovare il valore numerico dei vari parametri. La retta, l'ellisse e l'iperbole hanno 2 parametri; invece la circonferenza e la parabola hanno tre parametri.

Una volta trovati questi parametri è possibile scrivere l'equazione del luogo geometrico.

Il principio è analogo a quello di una caccia al tesoro in cui è necessario trovare un certo numero di indizi (che sono in pratica degli insiemi) e poi incrociarli per capire dove si trova il tesoro.

Nel caso dei problemi di geometria analitica il tesoro è costituto dal valore dei parametri e gli indizi servono per scrivere delle equazioni che contengono solo questi parametri.

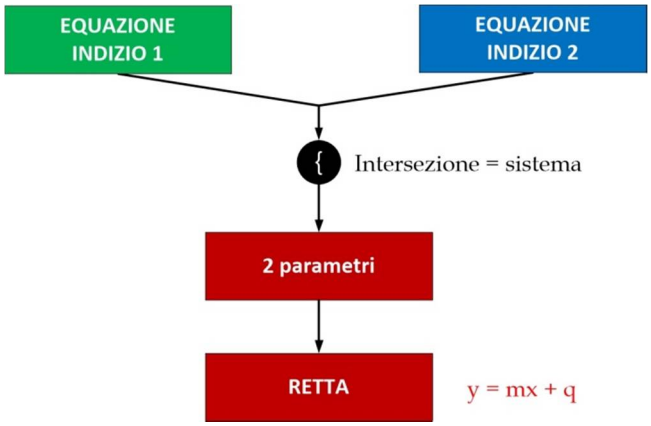
Ad esempio, da un indizio potremmo trovare un equazione del tipo $a + b + c = 2$, da un altro indizio potemmo trovare un'equazione del tipo $3a^2 + 3b - c = 1$ e dall'ultimo $a + 2b = 3$.

La soluzione si ottiene mettendo a sistema i tre indizi per trovare l'unica soluzione comune:

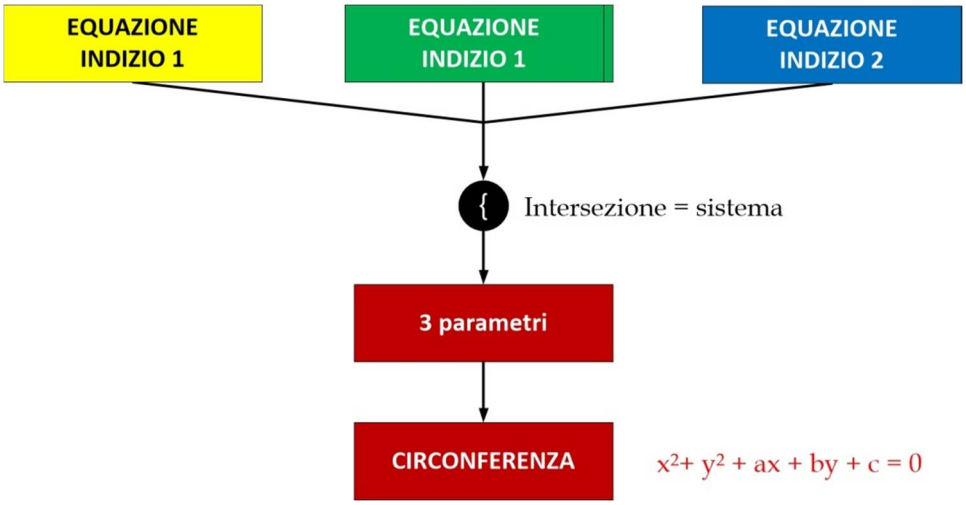
$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 3a^2 + 3b - c = 1 \\ a + 2b = 3 \end{cases}$$

Dalla soluzione del sistema si ottengono gli unici valori di a, b e c che sono comuni alle tre equazioni.

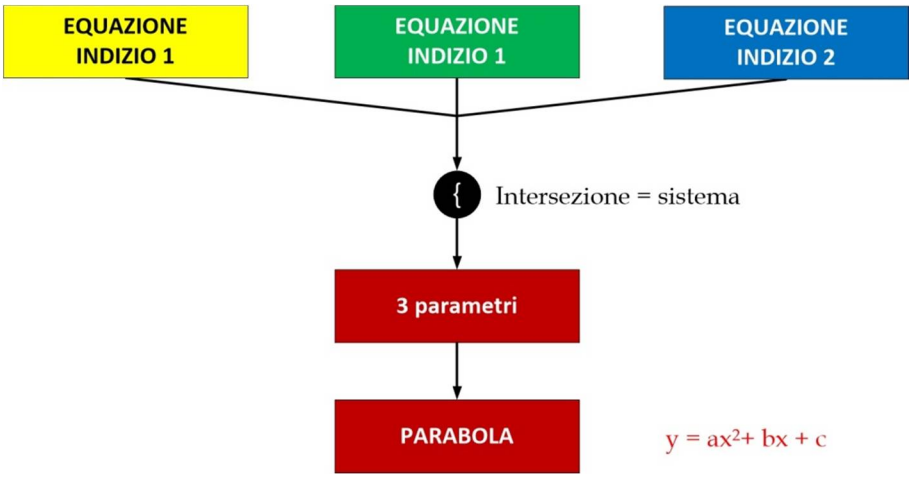
Dunque, se il testo dell'esercizio ci chiede di trovare una retta imposteremo uno schema di questo tipo:



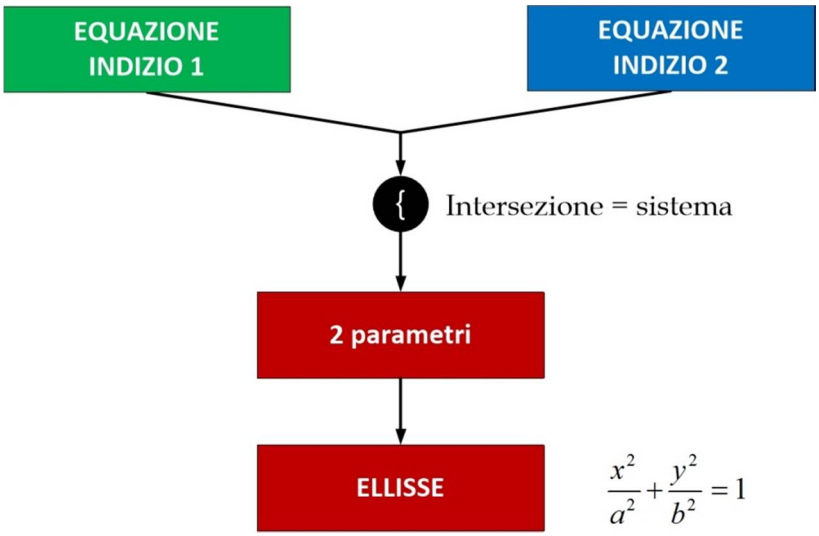
Se il testo ci chiede di trovare una circonferenza imposteremo uno schema di questo tipo:



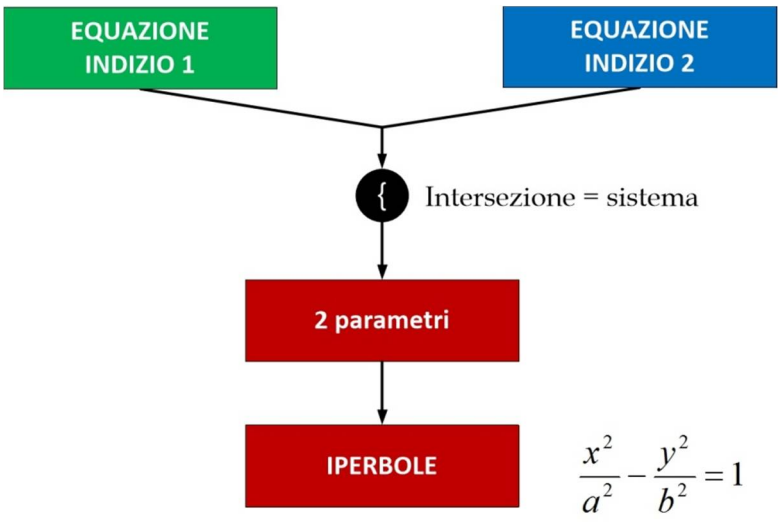
Se dobbiamo trovare una parabola impostiamo uno schema come quello seguente:



Se invece dobbiamo trovare un'ellisse possiamo scrivere:



E infine per l'iperbole:



6.1. *Come si trovano gli indizi?*

Gli indizi sono nascosti nel testo del problema. Una volta individuati è necessario capire come scrivere, grazie ad essi, l'equazione da mettere a sistema.

Per comodità possiamo classificare gli indizi in 3 grandi categorie:

- **PASSAGGIO PER UN PUNTO**: il testo del problema ci può dire che la curva passa per uno o più punti.
- **VALORE DI UNA CARATTERISTICA**: il testo ci potrebbe dire quanto vale il raggio di una circonferenza, o che coordinate ha il fuoco di un ellisse o l'equazione della direttrice di una parabola.
- **RELAZIONE RISPETTO A QUALCHE ALTRA CURVA**: il testo ci può dire che la curva che stiamo cercando è tangente ad una circonferenza, oppure che è parallela ad una retta o perpendicolare ad essa.

Facciamo degli esempi.

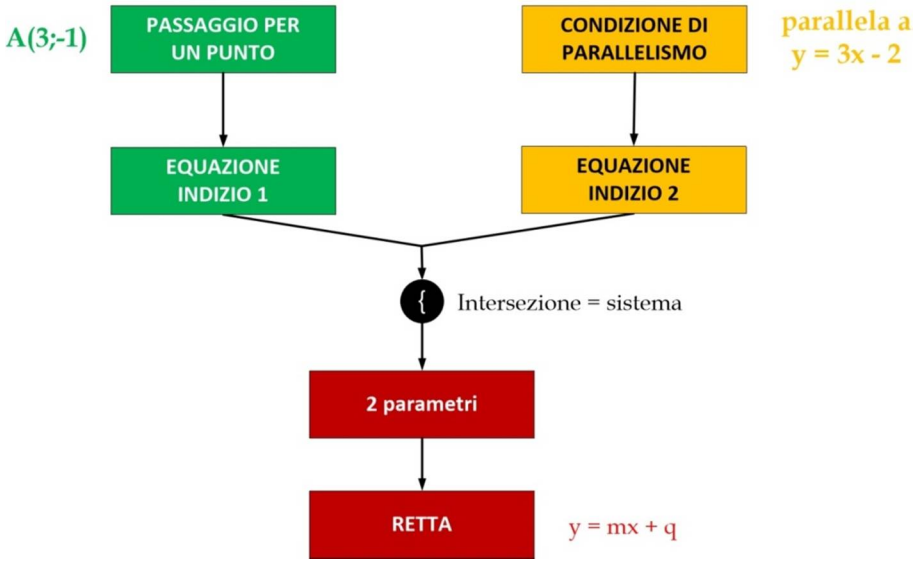
ESEMPIO 1:

Scrivi l'equazione della retta passante per il punto $A(3,-1)$ e parallela alla retta di equazione $y = 3x - 2$

Leggendo il testo possiamo ricavare alcune informazioni:

- Dobbiamo trovare una retta **[Scrivi l'equazione della retta]**
- Il primo indizio è un passaggio per un punto [**passante per il punto $A(3,-1)$**]
- Il secondo indizio è una relazione rispetto ad un'altra retta [**parallela alla retta di equazione $y = 3x - 2$**]

Dunque lo schema che possiamo costruire è il seguente:



Una volta costruito lo schema ci dobbiamo domandare se conosciamo tutti gli indizi che abbiamo scritto.

Conosciamo il punto per cui passa la retta? Sì.

Conosciamo la retta a cui è parallela? Sì.

Quindi non dobbiamo fare più alcun ragionamento e lo schema è finito.

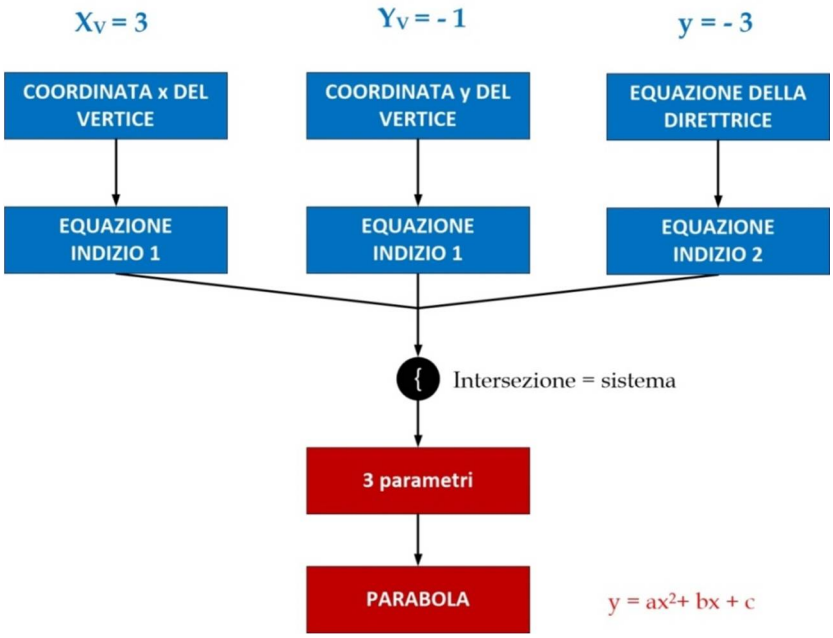
ESEMPIO 2:

Scrivi l'equazione di un parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle y che ha vertice $V(3;1)$ e direttrice $y = -3$

Leggendo il testo possiamo ricavare alcune informazioni:

- Dobbiamo trovare una parabola [**Scrivi l'equazione di un parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle y**]
- Il primo e il secondo indizio sono dati dalle coordinate del vertice. [**ha vertice $V(3;1)$**]. Il vertice ha due coordinate, ognuna con la propria espressione, e quindi si tratta di due indizi diversi (uno è la coordinata x_V e l'altro è la coordinata y_V
- Il terzo indizio è l'equazione della direttrice. [**direttrice $y = -3$**]

Si tratta, in tutti i casi, di caratteristiche della curva, quindi lo schema che possiamo costruire è:



Una volta costruito lo schema ci dobbiamo domandare se conosciamo tutti gli indizi che abbiamo scritto.

Conosciamo la coordinata x del vertice? Sì.

Conosciamo la coordinate y del vertice? Sì.

Conosciamo l'equazione della direttrice? Sì.

Quindi non dobbiamo fare più alcun ragionamento e lo schema è finito.

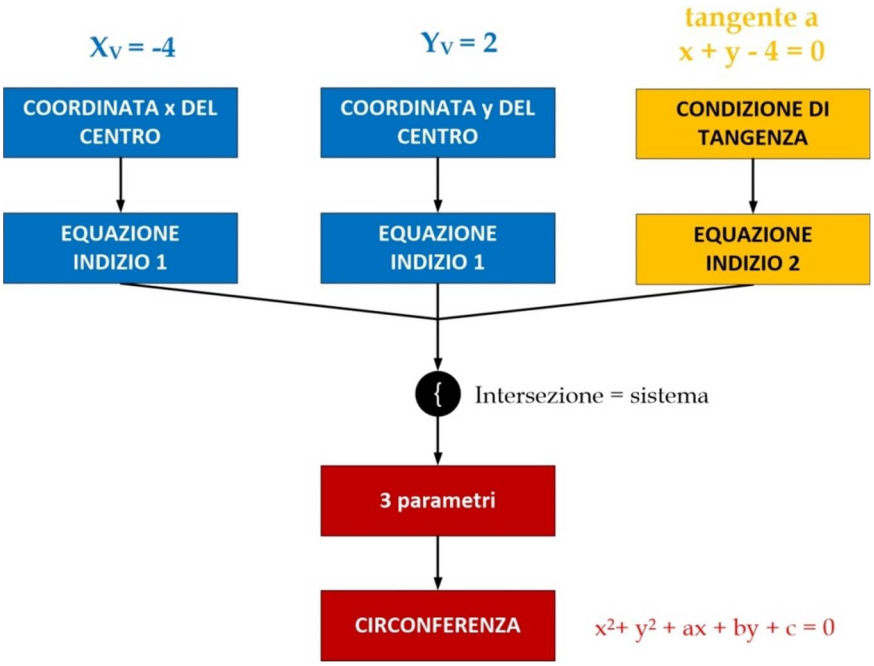
ESEMPIO 3:

Scrivi l'equazione di un circonferenza che ha centro $C(-4,2)$ e che è tangente alla retta $x + y - 4 = 0$

Leggendo il testo possiamo ricavare alcune informazioni:

- Dobbiamo trovare una circonferenza [**Scrivi l'equazione di una circonferenza**]
- Il primo e il secondo indizio sono dati dalle coordinate del centro. [**ha centro $C(-4;2)$**]. Il
- Il terzo indizio è una relazione con un'altra curva. [**è tangente alla retta $x + y - 4 = 0$**]

Si tratta di due caratteristiche della curva può una relazione; quindi lo schema che possiamo costruire è:



Una volta costruito lo schema ci dobbiamo domandare se conosciamo tutti gli indizi che abbiamo scritto.

Conosciamo la coordinata x del centro? Sì.

Conosciamo la coordinate y del centro? Sì.

Conosciamo la retta a cui è tangente? Sì.

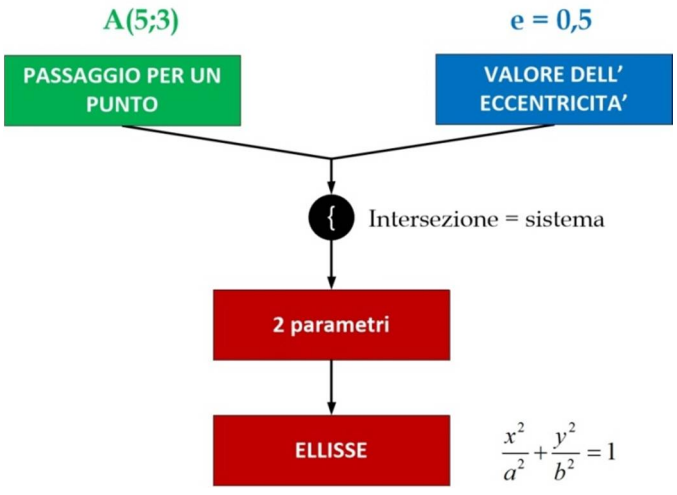
Quindi non dobbiamo fare più alcun ragionamento e lo schema è finito.

ESEMPIO 4:

Scrivi l'equazione di un ellisse che passa per il punto $A(5,3)$ e ha eccentricità pari a $\frac{1}{2}$

Leggendo il testo possiamo ricavare le seguenti informazioni:

- Dobbiamo trovare un ellisse [**Scrivi l'equazione di un ellisse**]
- Il primo indizio è dato dal passaggio per il punto A. [**passa per il punto $A(5,3)$**].
- Il secondo indizio è una caratteristica della curva. [**ha eccentricità pari a $\frac{1}{2}$**]



Una volta costruito lo schema ci dobbiamo domandare se conosciamo tutti gli indizi che abbiamo scritto.

Conosciamo il punto per cui passa l'ellisse? Sì.

Conosciamo il valore dell'eccentricità? Sì.

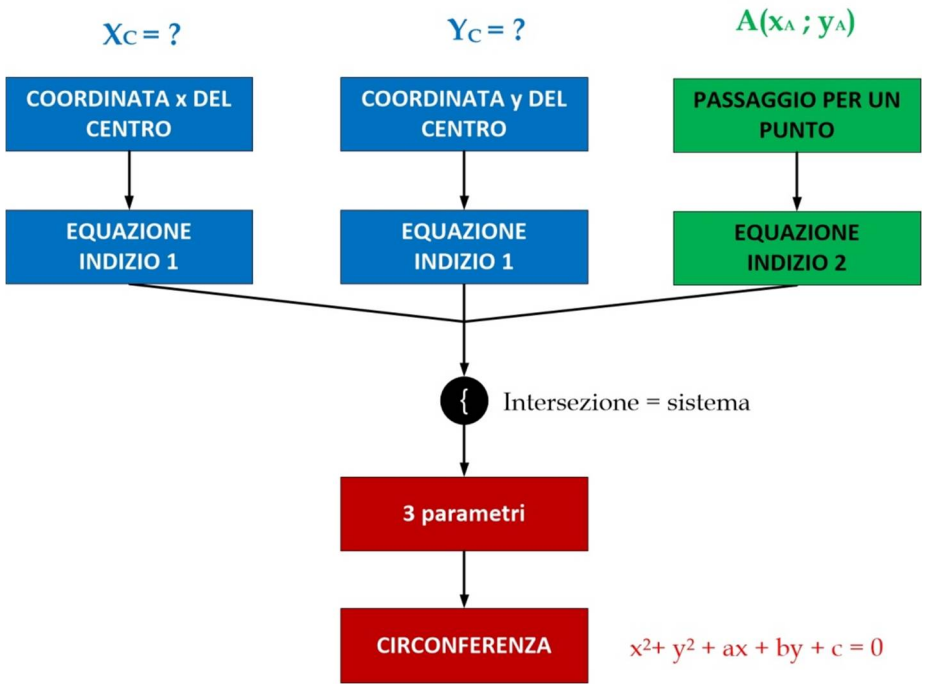
Quindi non dobbiamo fare più alcun ragionamento e lo schema è finito.

ESEMPIO 5: trova l'equazione della circonferenza concentrica a quella di equazione $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 4$ e passante per il punto A di intersezione tra le rette di equazione $x + 2y - 4 = 0$ e $y = 3x - 5$

Leggendo il testo possiamo ricavare le seguenti informazioni:

- Dobbiamo trovare una circonferenza [**Scrivi l'equazione di una circonferenza**]
- Il primo e il secondo indizio sono dati dalle coordinate del centro. [**concentrica a quella di equazione $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 4$**]. Non conosciamo però le coordinate, quindi prima di poter utilizzare questi due indizi dovremo trovare il centro di questa seconda circonferenza.
- Il terzo indizio è il passaggio per un punto. [**passante per il punto A di intersezione tra le rette di equazione $x + 2y - 4 = 0$ e $y = 3x - 5$**]. Anche qui però non conosciamo il punto e quindi dobbiamo determinarlo.

Possiamo costruire una prima parte di schema:

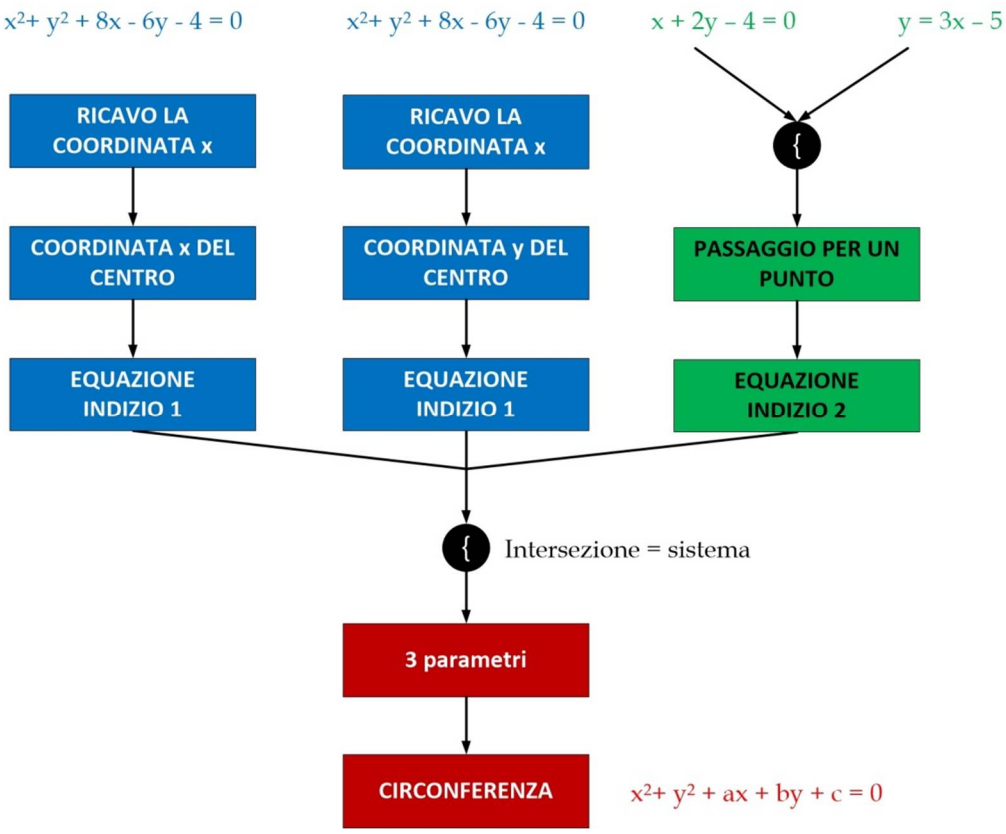


Una volta costruito lo schema ci dobbiamo domandare se conosciamo tutti gli indizi che abbiamo scritto.

Conosciamo le coordinate x e y del centro? No. Dobbiamo ricavarle sapendo che la circonferenza che stiamo cercando ha lo stesso centro (è concentrica) di un altra circonferenza di cui conosciamo l'equazione.

Conosciamo il punto A? No: dobbiamo calcolarlo sapendo che si tratta dell'intersezione tra due rette.

Dovremo quindi aggiungere alla schema un altro pezzo:



Adesso conosciamo tutto quello che ci serve.

5.1.1. *Passaggio per un punto*

Finora abbiamo solo costruito lo schema risolutivo, ma non abbiamo detto nulla su come fare per scrivere l'equazione degli indizi.

A seconda del tipo di indizio (passaggio per un punto, caratteristica o relazione) bisogna fare ragionamenti diversi.

Cominciamo ad analizzare il passaggio per un punto che è il tipo di indizio più semplice sa utilizzare.

Abbiamo già visto che un punto appartiene ad un luogo geometrico quando le sue coordinate, sostituite nell'equazione del luogo, danno un identità (cioè un uguaglianza).

Quindi se sappiamo che un luogo geometrico deve passare per un punto vuol dire che possiamo sostituire al posto delle variabili le coordinate del punto in questione.

Ad esempio, se una generica retta $y = mx + q$ passa per il punto $A(5; -1)$ possiamo scrivere:

$$y_A = m \cdot x_A + q \quad \rightarrow \quad -1 = m \cdot 5 + q$$

Ottenendo così un equazione in cui compaiono i parametri della retta che stiamo cercando.

Se sappiamo che una generica circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ passa per il punto $B(-3; 2)$ possiamo scrivere:

$(x_B)^2 + (y_B)^2 + a \cdot x_B + by_B + c = 0 \quad \rightarrow \quad 9 + 4 - 3a + 2b + c = 0 \quad \rightarrow \quad -3a + 2b + c + 13 = 0$

Otteniamo così un'equazione in cui compaiono i 3 parametri della circonferenza che stiamo cercando.

Dunque, **PER TROVARE L'EQUAZIONE DELL'INDIZIO DEL PASSAGGIO PER UN PUNTO SI SOSTITUISCONO LE COORDINATE DEL PUNTO NELL'EQUAZIONE DEL LUOGO GEOMETRICO**.

5.1.2. *Caratteristiche della curva*

Ogni volta che il testo ci fornisce una caratteristica della curva, noi conosciamo il valore numerico dell'equazione di quella caratteristica. Ad esempio, se il testo ci dice che il raggio di una circonferenza è lungo 5, noi possiamo scrivere che:

$$R = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c} = 5$$

Si tratta di un'equazione che contiene solo i parametri a, b e c che stiamo cercando.

Se il testo ci dice che il vertice di una parabola ha coordinate $V(1; -2)$ possiamo scrivere due equazioni:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = 1$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -2 \quad \rightarrow \quad -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -2$$

Si tratta quindi di due indizi, perché sono due equazioni che contengono solo i parametri a, b e c che stiamo cercando.

Se il testo ci dice che l'asintoto di un iperbole $y = -\frac{a}{b}x$ ha equazione $y = 2x$ noi possiamo scrivere:

$$-\frac{a}{b} = 2$$

Che è un equazione che contiene solo i parametri a e b.

5.1.3. *Relazioni con altre curve*

Il testo può anche fornirci come indizio una relazione con altre curve. Esistono quattro tipi di relazione:

- Parallelismo tra rette
- Perpendicolarità tra rette
- Intersezione tra due luoghi geometrici
- Tangenza tra due luoghi geometrici

PARALLELISMO TRA RETTE

Come abbiamo già visto, affinché due rette siano parallele è necessario che i loro coefficienti angolari siano uguali.

Quindi se il testo ci dice che una retta è parallela alla retta di equazione $2x + 3y - 4 = 0$ ci basta trovare il coefficiente angolare scrivendo la retta in forma esplicita:

$$y = \frac{-2x + 4}{3} \quad \rightarrow \quad y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

Dunque il coefficiente angolare di questa retta è $m = -\frac{2}{3}$ e anche la retta che stiamo cercando ha lo stesso coefficiente angolare.

PERPENDICOLARITÀ TRA RETTE

Abbiamo visto che quando due rette (ad esempio la retta r e la retta t) sono parallele i loro coefficienti angolari sono l'uno l'antireciproco dell'altro:

$$m_r = -\frac{1}{m_t}$$

Dunque, se il testo ci dice che dobbiamo determinare la retta che è perpendicolare a quella di equazione $2x - y + 3 = 0$ ci basta esplicitare la retta e trovare m:

$$y = 2x + 3$$

Sappiamo quindi che

$$m_{perpendicolare} = -\frac{1}{2}$$

INTERSEZIONE TRA DUE LUOGHI GEOMETRICI

Sappiamo che l'intersezione si effettua mettendo a sistema. Quindi se ci viene detto che una parabola passa per i punti di intersezione tra la circonferenza $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 4 = 0$ e la retta di equazione $y = x$ ci basta mettere a sistema la circonferenza e la retta per trovare i due punti di intersezione:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x - 6y - 4 = 0 \\ y = x \end{cases}$$

Risolvendo il sistema troveremo due soluzioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x - 6y - 4 = 0 \\ y = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + x^2 + 8x - 6x - 4 = 0 \\ y = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2x - 4 = 0 \\ y = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x - 4 = 0 \\ y = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \quad V \quad x_2 = -2 \\ y_1 = 1 \quad V \quad y_2 = -2 \end{cases}$$

Quindi troviamo i due punti:

$$A(1;1) \qquad B(-2;-2)$$

TANGENZA TRA DUE LUOGHI GEOMETRICI

La condizione di tangenza è la più difficile da utilizzare. Per capire come trovare l'equazione dell'indizio ragioniamo su cosa significa che due luoghi geometrici sono tangenti. Nel capitolo 5 abbiamo visto che quando due curve sono tangenti hanno in comune un solo punto.

Questo significa che, se le mettiamo a sistema, dobbiamo fare in modo che l'equazione di secondo grado che ne risulta abbia una sola soluzione, cioè abbia $\Delta = 0$.

Ad esempio, troviamo l'equazione della condizione di tangenza tra una circonferenza e la retta $y = 2x - 1$:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 + (2x-1)^2 + ax + b(2x-1) + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 + 4x^2 + 1 - 4x + ax + 2bx - b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 5x^2 + (a + 2b - 4)x + 1 - b + c = 0 \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto un equazione di secondo grado:

$$5x^2 + (a + 2b - 4)x + 1 - b + c = 0$$

Affinchè abbia una sola soluzione imponiamo la condizione di tangenza $\Delta = 0$:

$$\Delta = (a + 2b - 4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (1 - b + c) = 0$$

Da cui:

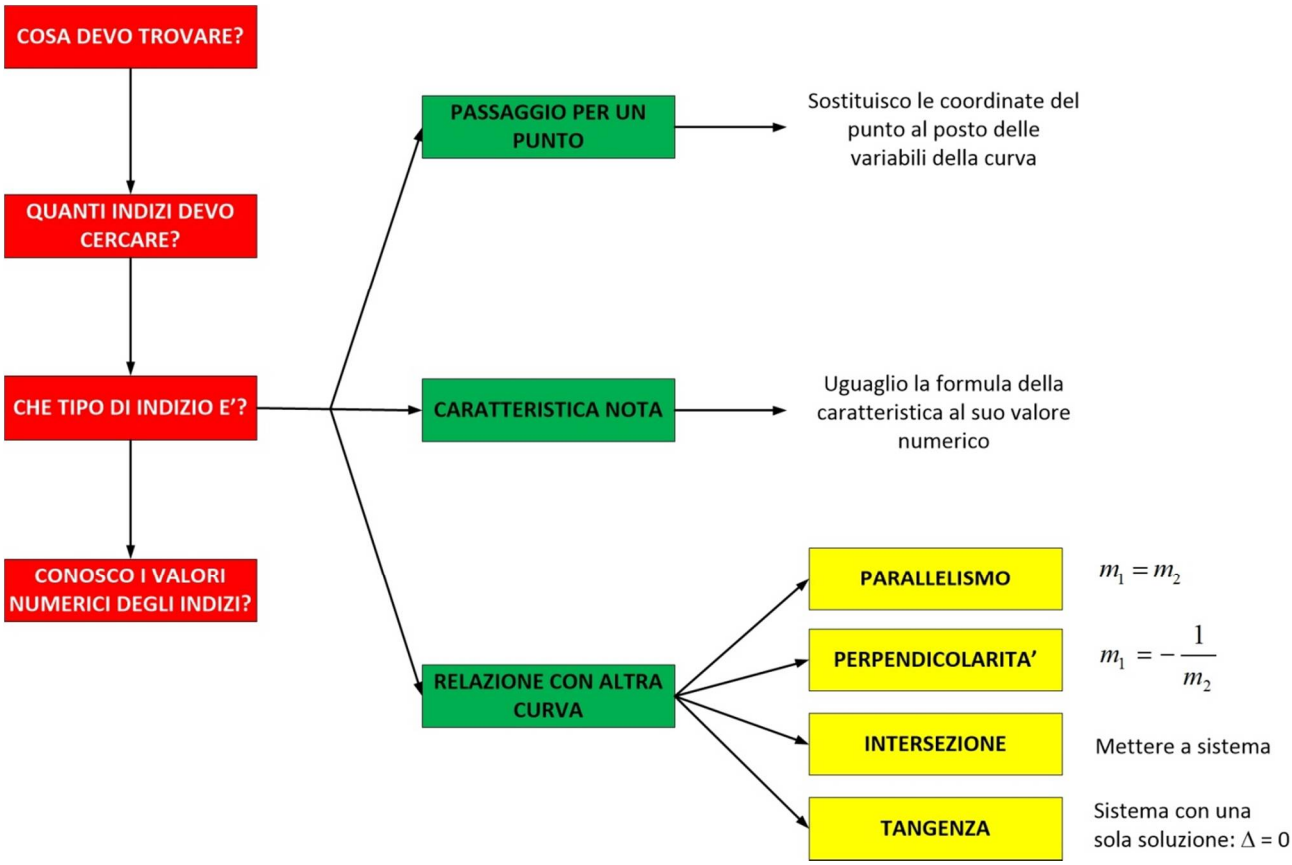
$$a^2 + 4b^2 + 16 + 4ab - 8a - 16b - 20 + 20b - 20c = 0$$

$$a^2 + 4b^2 + 4ab - 8a + 4b - 20c - 4 = 0$$

Questa equazione, che contiene solo i parametri a, b e c costituisce l'indizio cercato.

6.2. *Esempi risolti*

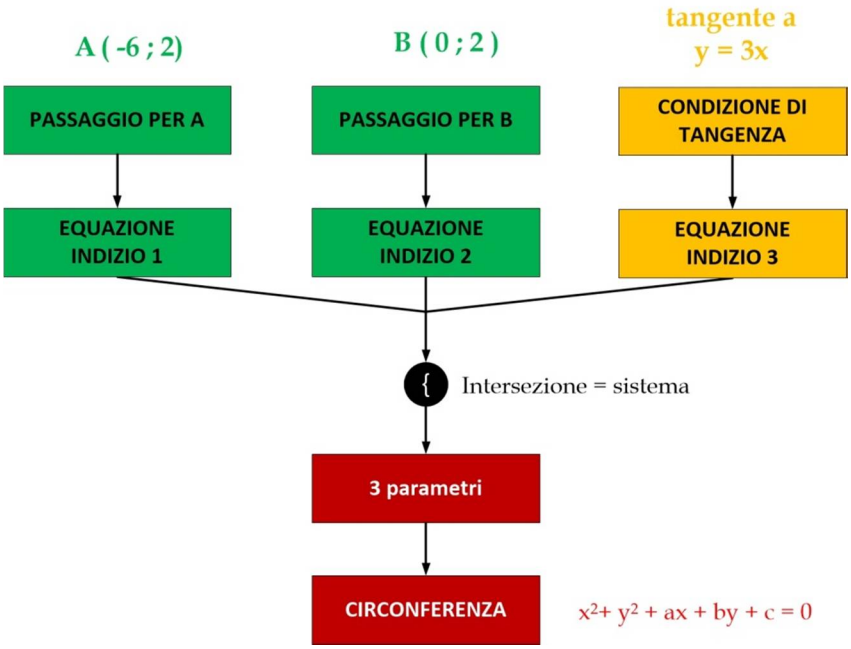
Per risolvere un esercizio è quindi necessario seguire una serie di passaggi:



ESERCIZIO 1: **Trova l'equazione della circonferenza che passa per il punto $A(-6;2)$, per il punto $B(0;2)$ ed è tangente alla retta $y = 3x$**

Leggendo il testo possiamo capire che dobbiamo trovare una circonferenza e dunque dobbiamo trovare tre indizi. Il primo e il secondo indizio sono passaggi per un punto; il terzo indizio è una relazione con un'altra curva, in particolare si tratta di una condizione di tangenza con una retta.

Possiamo dunque costruire il seguente schema.



Una volta costruito lo schema iniziamo a risolvere l'esercizio. Mentre abbiamo costruito lo schema a partire dal fondo, l'esercizio si risolve iniziando dall'alto.

Passaggio per A:

Sostituiamo alle variabili x e y le coordinate del punto A:

$(-6)^2 + (2)^2 - 3a + 2b + c = 0 \quad \rightarrow \quad 36 + 4 - 6a + 2b + c = 0 \quad \rightarrow \quad -6a + 2b + c + 40 = 0$

Quindi il primo indizio, cioè la prima equazione da mettere a sistema è:

$$\mathbf{-6a + 2b + c + 40 = 0}$$

Passaggio per B:

Sostituiamo alle variabili x e y le coordinate del punto B:

$$(0)^2 + (2)^2 + 0a + 2b + c = 0 \quad \rightarrow \quad 4 + 2b + c = 0$$

Quindi il primo indizio, cioè la prima equazione da mettere a sistema è:

$$\mathbf{4 + 2b + c = 0}$$

Condizione di tangenza con la retta:

Dobbiamo imporre che il sistema tra la circonferenza e la retta abbia una sola soluzione, cioè che il delta dell'equazione di secondo grado che ne risulta sia nullo.

$$\begin{cases} y = 3x \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ x^2 + 9x^2 + ax + 3bx + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x \\ 10x^2 + (a + 3b)x + c = 0 \end{cases}$$

L'equazione di secondo grado da risolvere è la seguente:

$$10x^2 + (a + 3b)x + c = 0$$

Se vogliamo che abbia una sola soluzione (cioè che al circonferenza e la retta siano tangenti) dobbiamo imporre che il determinante sia nulla:

$$\Delta = (a + 3b)^2 - 4 \cdot 10 \cdot c = 0$$

Il terzo indizio, cioè la terza equazione da mettere a sistema è:

$$\boldsymbol{a^2 + 9b^2 + 6ab - 40c = 0}$$

Sistema per trovare la circonferenza:

Ora mettiamo a sistema i tre indizi trovati:

$$\begin{cases} \boldsymbol{-6a + 2b + c + 40 = 0} \\ \boldsymbol{4 + 2b + c = 0} \\ \boldsymbol{a^2 + 9b^2 + 6ab - 40c = 0} \end{cases}$$

Una volta risolto il sistema troveremo a, b e c quindi potremo scrivere l'equazione della circonferenza:

$$\begin{cases} -6a + 2b + c + 40 = 0 \\ c = -4 - 2b \\ a^2 + 9b^2 + 6ab - 40c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6a + 2b - 4 - 2b + 40 = 0 \\ c = -4 - 2b \\ a^2 + 9b^2 + 6ab - 40(-4 - 2b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6a + 36 = 0 \\ c = -16 - 4b \\ a^2 + 9b^2 + 6ab + 160 + 80b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 6 \\ c = -4 - 2b \\ 36 + 9b^2 + 36b + 160 + 80b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 6 \\ c = -4 - 2b \\ 9b^2 + 116b + 196 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ c = -4 - 2b \\ b_1 = -2 \quad V \quad b_2 = -\frac{98}{9} \end{cases}$$

Da questo sistema ricaviamo due soluzioni. La prima è:

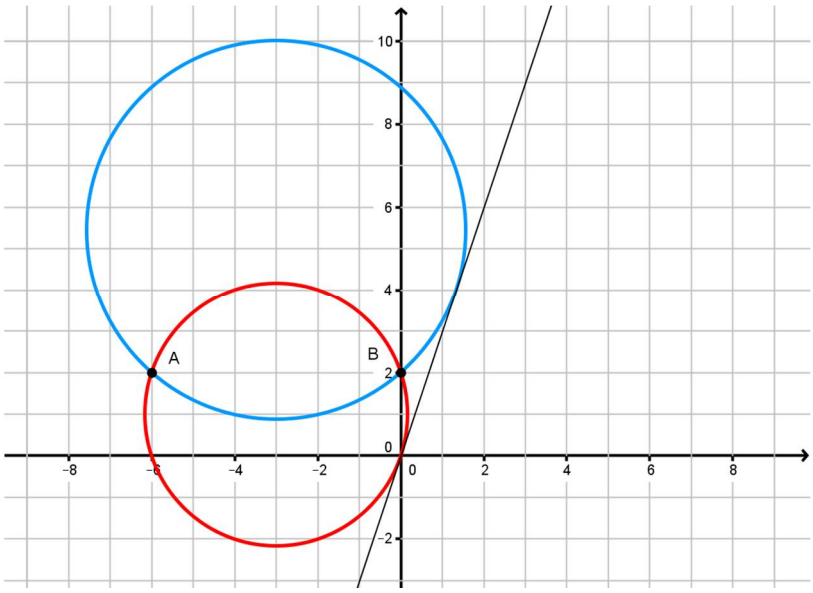
$$\begin{cases} a_1 = 6 \\ c_1 = 0 \\ b_1 = -2 \end{cases}$$

Che ci da come circonferenza:

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$$

L'altra soluzione è:

$$\begin{cases} a_1 = 6 \\ c_1 = \frac{160}{9} \\ b_1 = -\frac{98}{9} \end{cases}$$

Che da origine ad una seconda circonferenza:

$$x^2 + y^2 + 6x - \frac{98}{9}y + \frac{160}{9} = 0$$