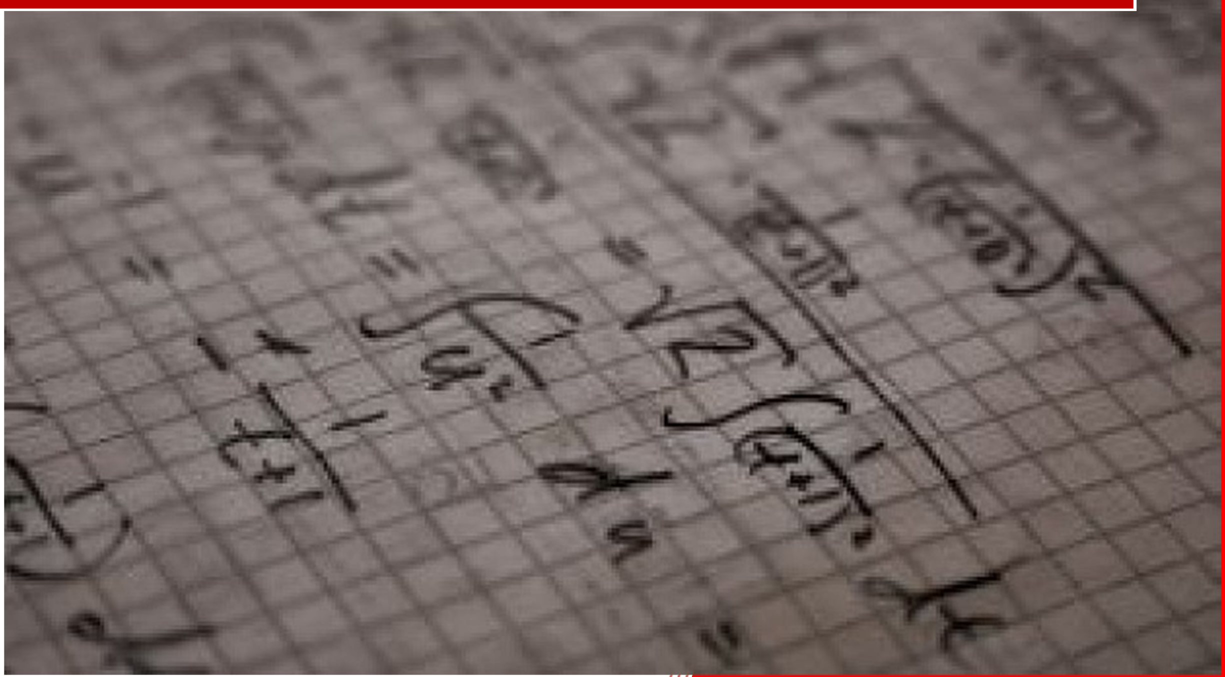
TECLA SPELGATTI

TEORIA MATEMATICA per la classe 5°



1.STUDIO GRAFICO DI FUNZIONE

Una funzione è un'espressione matematica, formata da numeri e operatori matematici, che lega due diversi insiemi di numeri.

Ad esempio, immaginiamo che il primo insieme, che potremmo chiamare A, sia formato da tutti i numeri naturali:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} = \{1,2,3, \dots\}$$

Un secondo insieme, che potremmo chiamare B, è formato da tutti i numeri pari:

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\} = \{2,4,6, \dots\}$$

Come sono legati questi due insieme? Come si possono trovare i numeri che appartengono all'insieme B conoscendo i numeri che appartengono all'insieme A?

Potremmo scrivere la seguente relazione:

$$b_i = 2 \cdot a_i$$

Secondo questa scrittura, ogni elemento dell'insieme B si ottiene moltiplicando per 2 gli elementi dell'insieme A. E infatti:

$$a_1 \times 2 = b_1 \quad \rightarrow \quad 1 \times 2 = 2$$
$$a_2 \times 2 = b_2 \quad \rightarrow \quad 2 \times 2 = 4$$
$$a_3 \times 2 = b_3 \quad \rightarrow \quad 3 \times 2 = 6$$

L'elemento b_i si chiama **IMMAGINE DI a_i**.

Affinché si possa parlare di funzione, deve però valere un'altra condizione: ad ogni elemento dell'insieme A deve corrispondere uno ed un solo elemento dell'insieme B.

1.1. *La nomenclatura delle funzioni*

I due insiemi che abbiamo chiamato A e B possono avere qualunque nome. Di solito però l'insieme A viene indicato con la lettera X e viene chiamato **DOMINIO**, mentre l'insieme B viene indicato con la lettera Y e chiamato **CODOMINIO**.

Dunque possiamo dare una definizione rigorosa di funzione:

UNA FUNZIONE È UNA RELAZIONE MATEMATICA CHE ASSOCIA AD OGNI ELEMENTO x, PRESO DALL'INSIEME X, CHIAMATO DOMINIO, UNO ED UN SOLO ELEMENTO y, PRESO DALL'INSIEME Y, CHIAMATO CODOMINIO.

Una generica funzione si indica con le scritture seguenti:

$$f: x \longmapsto y$$

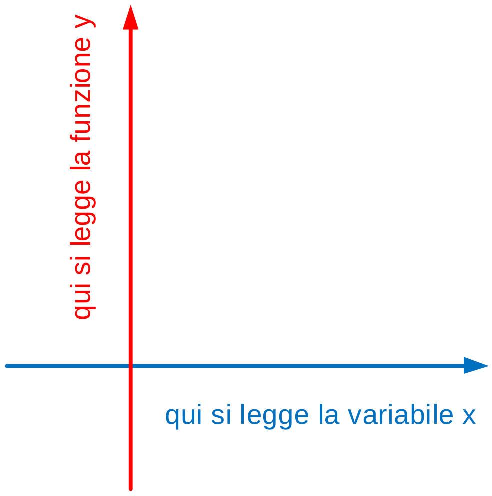
$$y = f(x)$$

che significa che la y, chiamata anche **VARIABILE DIPENDENTE**, è funzione della x, chiamata anche **VARIABILE INDIPENDENTE.**

Dunque, riassumendo, possiamo dire che la funzione lega tra loro due elementi:

- La variabile indipendente x, appartenente all'insieme X, chiamato dominio.
- La variabile dipendente y, appartenente all'insieme Y, chiamato codominio.

Ricorda che sull'**asse x**, chiamato anche asse delle ascisse, si legge la **variabile x**, chiamata anche solo variabile, mentre sull'**asse y**, chiamato anche asse delle ordinate, si legga la variabile y, chiamata **funzione**, poiché la y è uguale a tutta l'espressione matematica, indicata con $f(x)$.



Ricorda quindi che quando si parla di funzione si intende tutta l'espressione matematica contenente la x oppure si intende la y (tanto sono la stessa cosa).

Ad esempio, la retta:

$$y = 2x + 3$$

è una funzione. La variabile è la x, che si legge sull'asse orizzontale; la funzione è la y che è uguale a $2x + 3$, e si legge sull'asse verticale.

A volte, quando si ha a che fare con più funzioni in uno stesso esercizio, si utilizzano altre lettere, oltre alla f per indicare la funzione. Ad esempio:

$$y = h(x)$$
$$y = f(x)$$

dove $h(x)$ è un espressione matematica e $f(x)$ è un'altra espressione matematica.

Lo studio delle funzioni e tutto ciò che ne consegue prende il nome di **ANALISI MATEMATICA**.

Il programma della classe 5° prevede lo studio di una certa categoria di funzioni, chiamate funzioni reali di variabile reale.

Sono cioè quelle funzioni in cui gli insiemi Y e X sono sottoinsiemi dei numeri reali. Esistono anche funzioni in cui le variabili sono numeri complessi, ma questo non è programma delle scuole superiori.

In questa sezione studieremo dunque l'analisi di funzione y reale di variabile x reale.

Lo studio di funzione prevede il calcolo analitico (cioè è necessario trovare i numeri partendo dall'espressione matematica della funzione) di alcune cose:

- Dominio
- Simmetrie
- Intersezioni con gli assi
- Segno
- Asintoti
- Massimi, minimi e monotonia
- Flessi e concavità

Ognuna di queste cose può essere trovata tramite dei metodi matematici a partire dall'espressione matematica della funzione.

Prima di studiare analiticamente una funzione dovremo però imparare a farne lo studio grafico, cioè dobbiamo determinare le caratteristiche della lista precedente dall'osservazione del grafico.

Inoltre, prima di poter affrontare lo studio analitico, sarà necessario imparare ad utilizzare due importati strumenti della matematica: il limite e la derivata.

1.2. *Caratteristiche delle funzioni*

In questo paragrafo cercheremo di capire cosa sono e come si individuano graficamente le caratteristiche elencate nel paragrafo precedente.

1.2.1. *Dominio e codominio*

Il dominio e il codominio sono tra le cose più importanti da capire per lo studio delle funzioni.

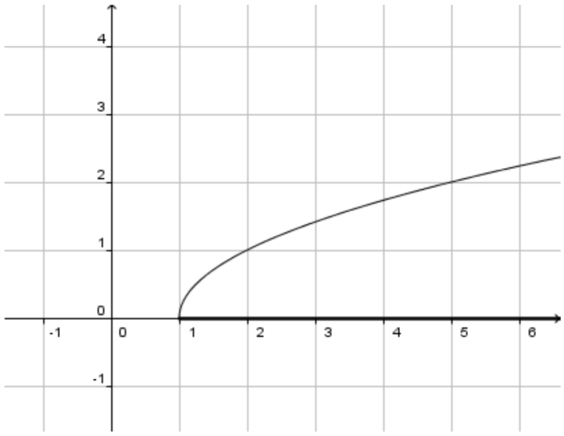
Spendiamo dunque due parole su questi due insiemi.

Il dominio

Il dominio, o campo di esistenza di una funzione, è il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ nel quale la funzione è definita. In pratica è l'insieme dei valori che si possono dare alla x.

Su un grafico, il dominio è quella porzione dell'asse x in cui la funzione esiste. Osserviamo ad esempio il grafico della funzione seguente:

$$y = \sqrt{x-1}$$



Questa funzione parte dal punto $x = 1$ e assume tutti valori maggiori di 1.

Il dominio di questa funzione è:

$$\mathcal{D} : \forall x \in \mathbb{R} : x > 1$$

Oppure, scritto in un altra forma:

$$\mathcal{D} : [\,1\,, +\infty\,)$$

Dove la parentesi quadra indica che 1 è compreso nel dominio. Un altro modo per scrivere le parentesi è il seguente:

$$[\,1\,, +\infty\,[$$

Il dominio si indica con la lettera maiuscola $\mathbb{D}$ oppure con la sigla C.E. che sta per "Campo di Esistenza".

Il codominio

Il codominio della funzione è il sottoinsieme dei numeri reali che comprende tutti i valori che può assumere la funzione y.

Su un grafico è la porzione dell'asse y in cui esistono valori della funzione.

Nel caso della funzione precedente, il codominio vale:

$$\forall\, y \in \mathbb{R} : y > 0$$

Riassumendo:

- **IL DOMINIO È L'INSIEME DEI VALORI x, APPARTENENTI ALL'INSIEME X, PER I QUALI UN'ESPRESSIONE MATEMATICA RISULTA DEFINITA (CIOÈ DA COME RISULTATO UN NUMERO).**

  IL DOMINIO SI LEGGE SULL'ASSE x.

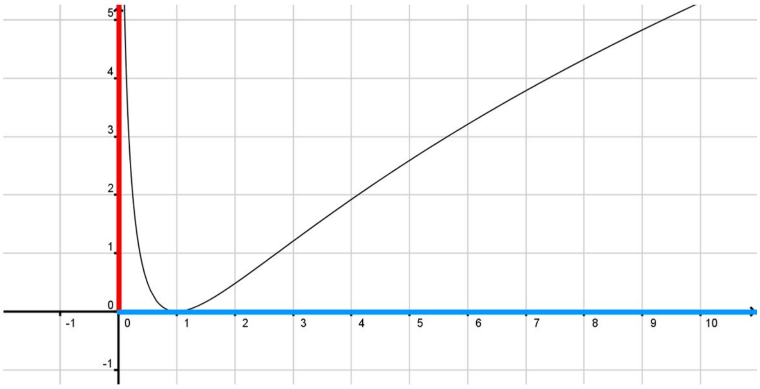
- **IL CODOMINIO È L'INSIEME DEI VALORI y, APPARTENENTI ALL'INSIEME Y, CHE RISULTANO DA UN'ESPRESSIONE MATEMATICA PER OGNI VALORE x DEL SUO DOMINIO.**

  IL CODOMINIO SI LEGGE SULL'ASSE y.

Di seguito sono riportate le espressioni matematiche di alcune funzioni e il loro grafico. Per ognuna di esse sono indicati il dominio e il codominio come risultano dai grafici.

Esempio 1:

$$y = (\ln x)^2$$



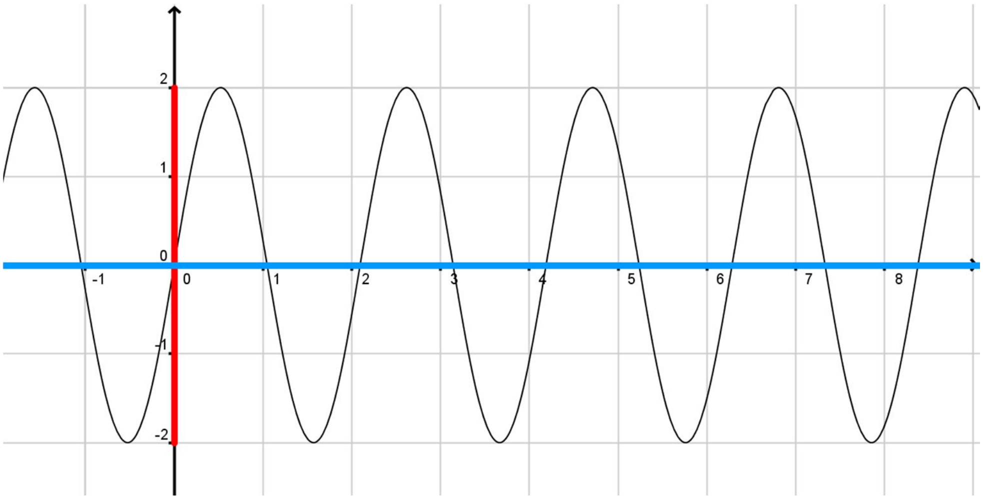
Dominio: $(0; +\infty)$

Codominio: $[0; +\infty)$

Attenzione: il punto $x = 0$ è escluso dal dominio poiché il logaritmo non può mai avere argomento nullo. Il codominio invece comprende lo zero poiché quando $x = 1$, il logaritmo è $\ln(1) = 0$.

Esempio 2:

$$y = 2\sin(3x)$$

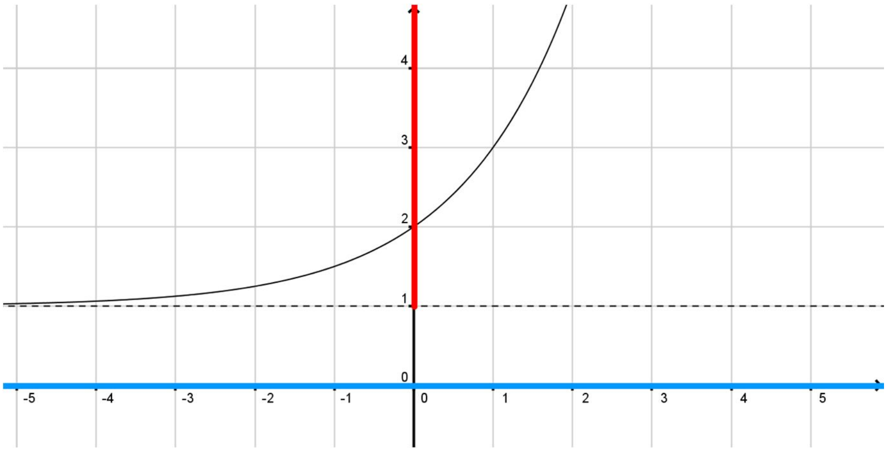


Dominio: $(-\infty; +\infty)$

Codominio: $[-2; +2]$

Esempio 3:

$$y = 2^x + 1$$



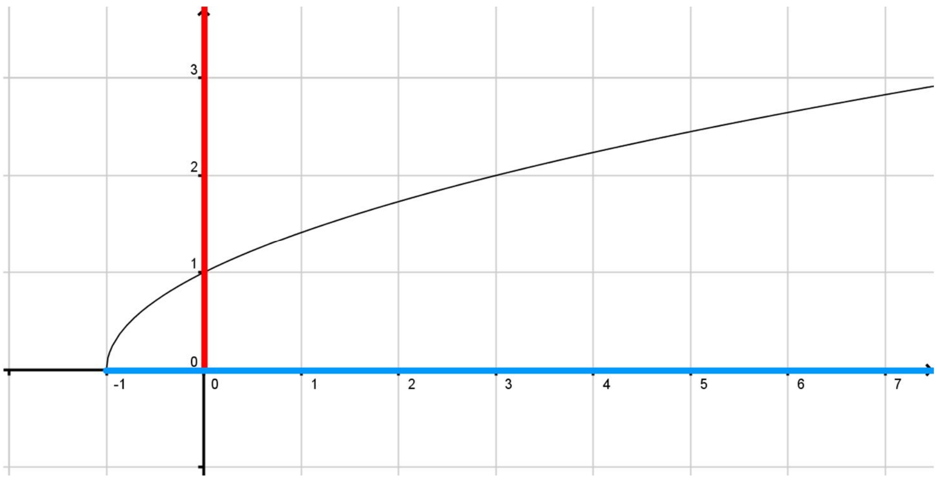
Dominio: $(-\infty; +\infty)$

Codominio: $(1; +\infty)$

Attenzione: il codominio non è mai inferiore a $y = 1$. Infatti questa funzione, pur avvicinandosi alla retta tratteggiata, non scende mai sotto di essa. Vedremo più avanti che una retta di questo tipo si chiama asintoto orizzontale.

Esempio 4:

$$y = \sqrt{x + 1}$$



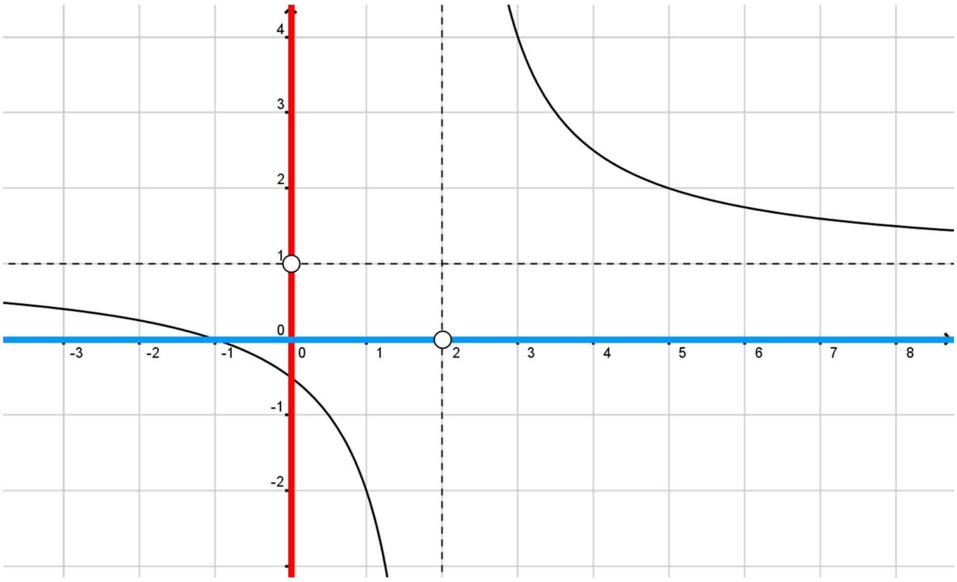
Dominio: $[-1; +\infty)$

Codominio: $[0; +\infty)$

Attenzione: gli estremi dell'intervallo sono compresi. Infatti la radice può anche avere argomento nullo (in questo caso $x = -1$).

Esempio 5:

$$y = \frac{x + 1}{x - 2}$$



Dominio: $(-\infty; 2)\ V\ (2; +\infty)$

Codominio: $(-\infty; 1)\ V\ (1; +\infty)$

Attenzione: il dominio è interrotto in $x = 2$. Se infatti osserviamo l'espressione matematica della funzione, vediamo che per quel valore il denominatore si annulla. Lo stesso vale per il codominio: la funzione non assumerà mai il valore $y = 1$.

Queste due rette si chiamano asintoto verticale ($x = 2$) e asintoto orizzontale ($y = 1$).

1.2.2. ***Le simmetrie***

Alcune funzioni godono di una particolare proprietà: sono simmetriche rispetto ad un asse. L'asse può essere di qualunque tipo: ad esempio le parabole sono tutte simmetriche rispetto ad un asse verticale.

Esistono però due particolari simmetrie:

- Simmetria rispetto all'asse y. Una funzione di questo tipi si dice **PARI**.
- Simmetria rispetto alla retta $y = x$, bisettrice del primo e terzo quadrante. In questo caso la funzione si dice **DISPARI**.

Funzioni pari

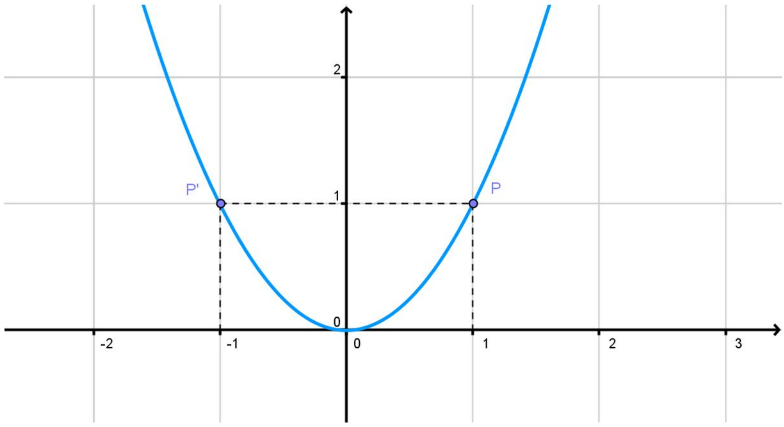
Da un punto di vista matematico, per capire se una funzione è pari, è necessario che sia verificata la seguente uguaglianza:

$$f(-x) = f(x)$$

Graficamente si può notare che una funzione simmetrica rispetto all'asse y assume gli stessi valori (cioè la stessa y o la stessa $f(x)$, tanto sono uguali) anche quando il segno della x viene cambiato.

Osserviamo ad esempio la funzione:

$$y = x^2$$



Il punto P e il punto P' appartengono entrambi alla funzione e sono simmetrici rispetto all'asse y. Infatti le loro coordinate x sono una opposta all'altra:

$$x_P = 1$$
$$x_{P'} = -1$$

E le loro coordinate y sono uguali:

$$f(1) = f(-1)$$

Infatti:

$$f(1) = 1$$
$$f(-1) = 1$$

Risulta anche:

$$f(2) = 4$$
$$f(-2) = 4$$

Affinché una funzione sia simmetrica rispetto all'asse y questa proprietà deve valere per tutti i punti, cioè per qualunque valore di x. E' quindi necessario trovare un modo per indicare questa proprietà:

UNA FUNZIONE SI DICE PARI SE

$$\forall x \epsilon \mathbb{R} \rightarrow f(-x) = f(x)$$

che si legge: per ogni x appartenente a $\mathbb{R}$ la funzione calcolata in x assume lo stesso valore della funzione calcolata in $-x$.

Funzioni dispari

Da un punto vista matematico, affinché una funzione sia dispari è necessario che sia verificata la seguente uguaglianza:

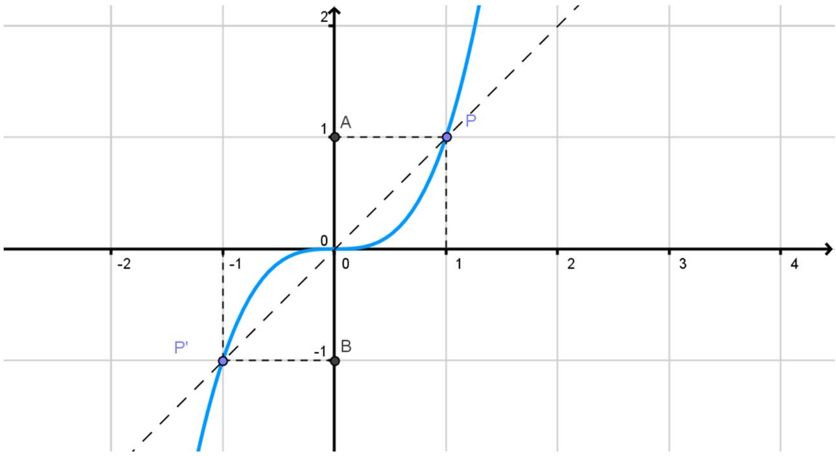
$$f(-x) = -f(x)$$

Graficamente si vede che una funzione simmetrica rispetto alla retta $y = x$ assume valori uguali e opposti (cioè con segno cambiato) per ogni coppia di punti la cui coordinata x è simmetrica.

Cioè, scelto un punto P la cui coordinata x sia x_P, il suo simmetrico di coordinata $x_{P'} = -x_P$ deve avere coordinata y pari a $y_{P'} = -y_P$.

Osserviamo ad esempio la funzione seguente:

$$y = x^3$$



Infatti si può calcolare che:

$$f(1) = 1$$

$$f(-1) = -1$$

E anche

$$f(2) = 8$$

$$f(-2) = -8$$

Bisogna però scrivere questa proprietà in modo che sia rispettata in ogni punto x.

Dunque, **UNA FUNZIONE È DISPARI SE**

$$\forall x \epsilon \mathbb{R} \rightarrow f(-x) = -f(x)$$

che si legge: per ogni x appartenente a $\mathbb{R}$ la funzione calcolata in x assume valore uguale e opposto a quello della funzione calcolata in $-x$.

Riassumendo:

UNA FUNZIONE SI DICE PARI SE $\forall x \epsilon \mathbb{R} \rightarrow f(-x) = f(x)$

UNA FUNZIONE SI DICE DISPARI SE $\forall x \epsilon \mathbb{R} \rightarrow f(-x) = -f(x)$

1.2.3. *L'intersezione con gli assi*

Su questo punto non ci soffermeremo a lungo poiché si tratta di cose già viste nella prima parte del corso.

L'intersezione con l'asse x si fa risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

Quello che si ottiene sono dei punti (che possono essere più di uno o possono anche non esserci) nei quali la funzione (cioè la y) assume valore zero.

L'intersezione con l'asse y si fa risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$$

Si può ottenere al massimo un punto, mai due. Infatti se ci fossero due y corrispondenti alla stessa $x = 0$ non staremmo studiando una funzione.

1.2.4. *Il segno*

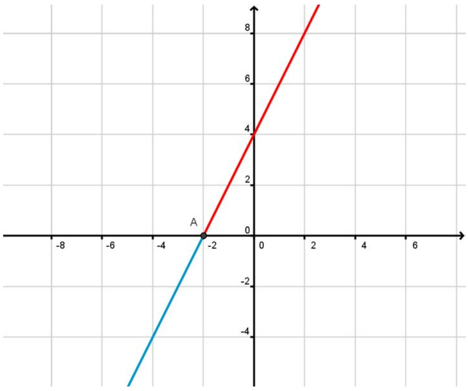
Abbiamo già analizzato il significato dello studio del segno nella prima parte, ma è fondamentale avere ben chiaro questo concetto.

La funzione ha segno positivo quando sta sopra all'asse delle x. Matematicamente è necessario trovare per quali valori della x la funzione $f(x)$ è positiva e per quali è negativa.

Graficamente è facile individuare questi intervalli, ma analiticamente è necessario risolvere una disequazione.

Esempio 1:

$$y = 2x + 4$$

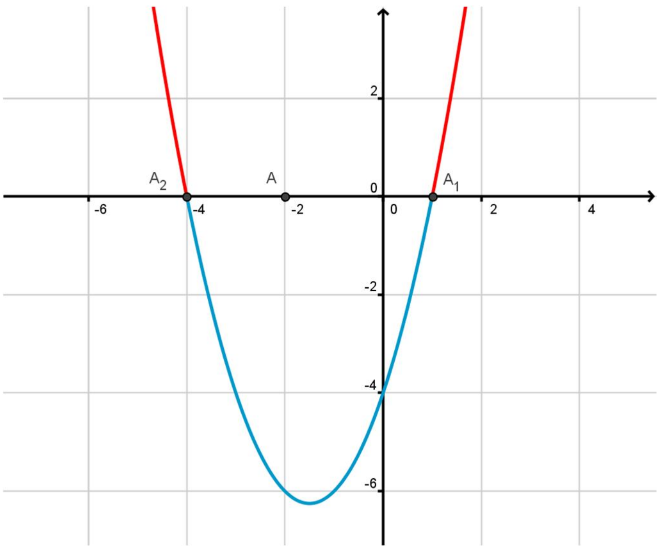


$$f(x) \geq 0 \;\rightarrow\; x \geq -2$$

$$f(x) < 0 \;\rightarrow\; x < -2$$

Esempio 2:

$$y = x^2 + 3x - 4$$

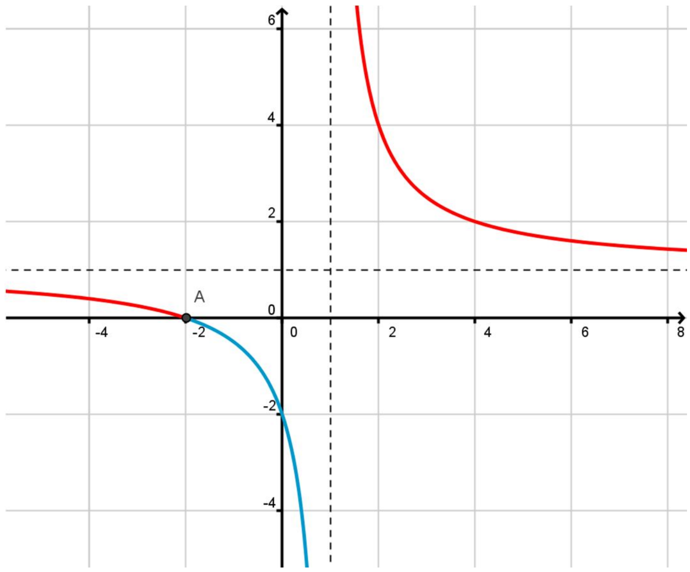


$$f(x) \geq 0 \;\rightarrow\; x \leq -4 \;\; V \;\; \geq 1$$

$$f(x) < 0 \;\rightarrow\; -4 < x < 1$$

Esempio 3:

$$y = \frac{x+2}{x-1}$$



$$f(x) \geq 0 \;\rightarrow\; x \leq -2 \;\; V \;\geq 1$$

$$f(x) < 0 \;\rightarrow\; -2 < x < 1$$

1.2.5. ***Gli asintoti***

Gli asintoti sono delle rette a cui la funzione si avvicina sempre di più, senza mai toccarle. Essendo rette, gli asintoti possono essere di tre tipi:

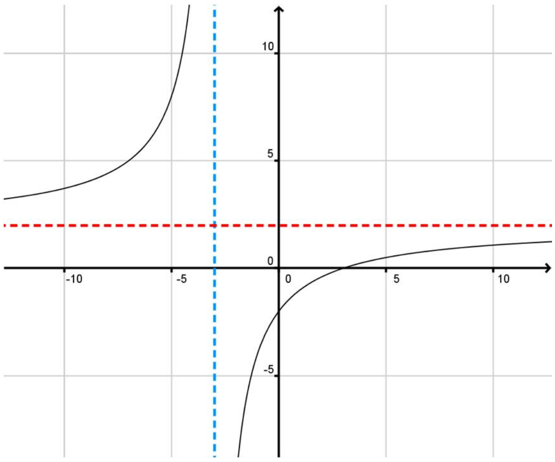
- Orizzontali
- Verticali
- Obliqui

Una funzione può avere uno di questi tipi di asintoto, può avere sia degli asintoti verticali che orizzontali, o verticali e obliqui, ma non può mai avere sia gli asintoti obliqui che quelli orizzontali perché altrimenti ad un valore della x corrisponderebbero due valori della y.

Per il calcolo analitico degli asintoti è necessario utilizzare uno strumento matematico, chiamato limite, che impareremo ad usare nel prossimo capitolo.

Esempio 1:

$$y = \frac{2x-6}{x+3}$$

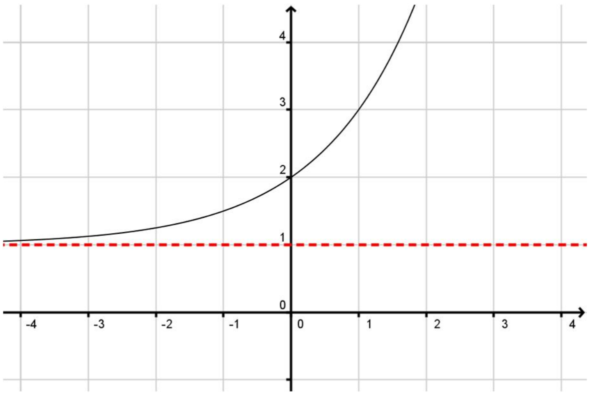


Asintoto orizzontale di equazione $y = 2$:

Asintoto verticale di equazione: $x = -3$

Esempio 2:

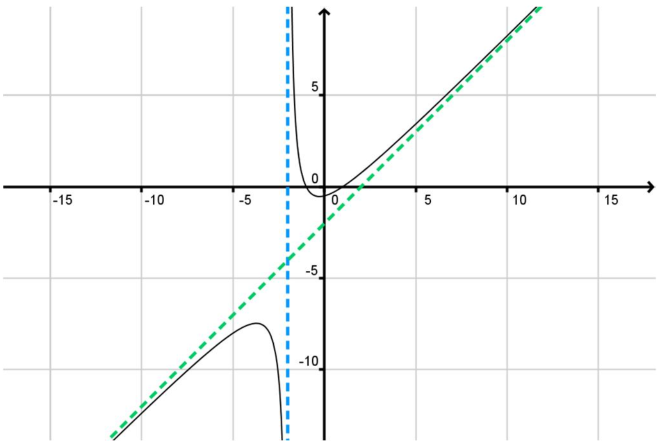
$$y = 2^x + 1$$



Asintoto orizzontale di equazione: $y = 1$

Esempio 3:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$$

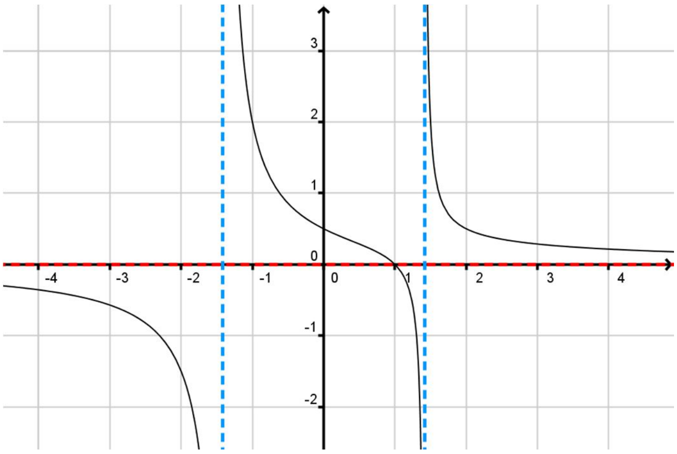


Asintoto verticale di equazione: $x = -2$

Asintoto obliquo di equazione: $y = x - 2$

Esempio 4:

$$y = \frac{x-1}{x^2-2}$$



Asintoto orizzontale di equazione: $y = 0$ (coincide con l'asse x)

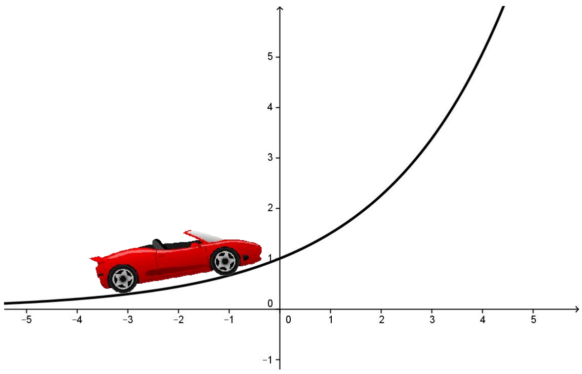
Primo asintoto verticale di equazione: $x = -\sqrt{2}$

Secondo asintoto verticale di equazione: $x = \sqrt{2}$

1.2.6. *La monotonia*

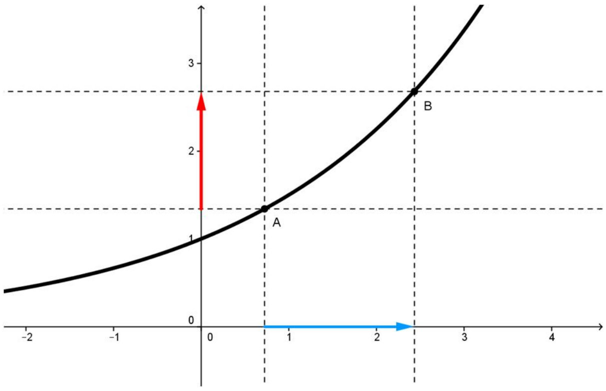
La monotonia è la tendenza di una funzione a crescere o a decrescere. Per capire questo concetto immaginiamo che la funzione sia una strada da percorrere da sinistra verso destra. Una funzione crescente può essere vista come una strada in salita. Una funzione decrescente può essere vista come una strada in discesa.

Ad esempio, un esponenziale con base maggiore di 1 cresce sempre; lo stesso fa un logaritmo.



Come si può vedere dal grafico, quando la x aumenta, anche la y aumenta. Matematicamente si dice che una funzione è strettamente crescente (cioè non può rimanere costante, deve sempre crescere) se:

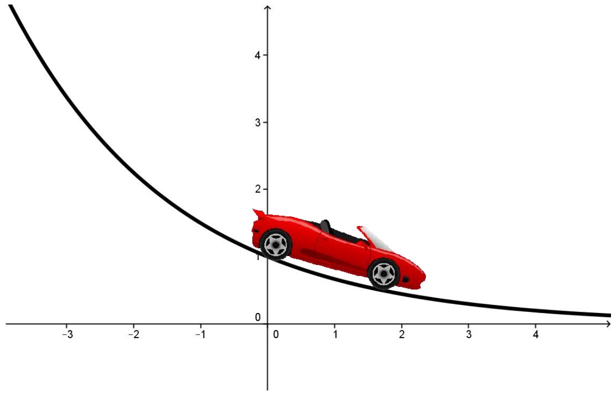
$$\forall\, x_1 < x_2 \;\rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



Se invece la funzione può anche rimanere costante, oltre che crescere, si dice che è crescente, ma non strettamente. Matematicamente, si dice che una funzione è crescente se

$$\forall\ x_1 < x_2 \ \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Invece un esponenziale con base minore di 1 decresce sempre:



In termini matematici, una funzione è strettamente decrescente se

$$\forall\ x_1 < x_2 \ \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

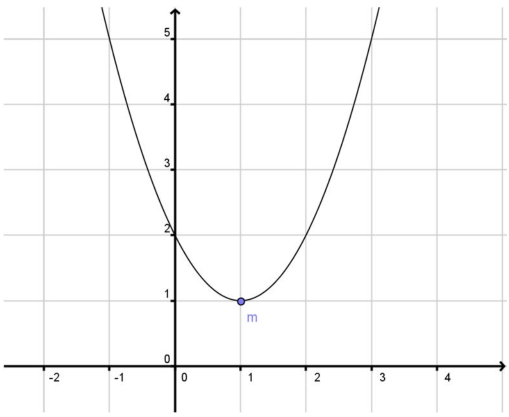
Una funzione che oltre a decrescere può anche rimanere costante si dice che è decrescente, ma non strettamente se

$$\forall\ x_1 < x_2 \ \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Se una funzione non è monotona, cioè un po' cresce e un po' decresce, ci deve essere un punto in cui passa dall'essere una funzione crescente ad essere una funzione decrescente, o viceversa.

Osserviamo ad esempio la seguente funzione:

$$y = x^2 - 2x + 2$$



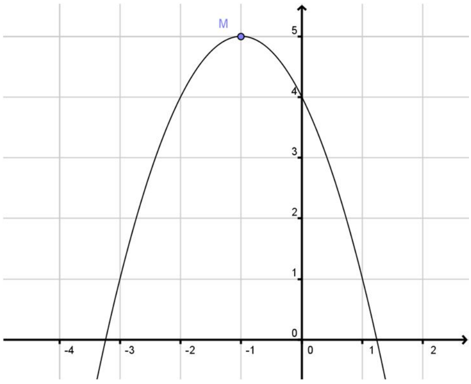
Nel punto $x = 1$ questa funzione passa dall'essere decrescente all'essere crescente.

Questo punto è quello che ha ordinata più piccola, è cioè un **PUNTO DI MINIMO**, un punto cioè in cui la funzione $f(x)$ assume il più piccolo valore possibile.

Si dice anche che la funzione è limitata inferiormente.

La curva seguente invece è esattamente il contrario:

$$y = -x^2 - 2x + 4$$



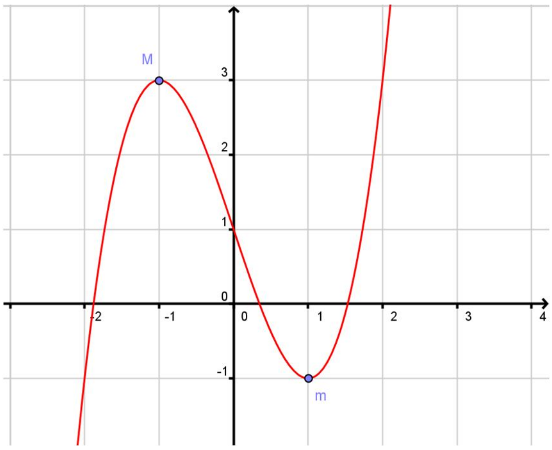
Nel punto $x = -1$ questa funzione passa dall'essere crescente all'essere decrescente.

Questo punto è quello che ha ordinata più grande, è cioè un **PUNTO DI MASSIMO**, un punto cioè in cui la funzione $f(x)$ assume il più grande valore possibile.

Si dice anche che la funzione è limitata superiormente.

Osserviamo infine una curva che ha sia un punto di massimo che un punto di minimo:

$$y = x^3 - 3x + 1$$



Nel punto $x = -1$ questa funzione passa dall'essere crescente all'essere decrescente. Siamo quindi in presenza di un punto di massimo.

Nel punto $x = 1$ la funzione passa dall'essere decrescente all'essere crescente. Siamo quindi in presenza di un punto di minimo.

La funzione non è limitata: i due punti di massimo e minimo non sono assoluti. Infatti al di sopra del punto di massimo ci sono altri valori. Si tratta quindi di un **PUNTO DI MASSIMO LOCALE** (cioè è il massimo rispetto ai punti circostanti.)

Lo stesso vale per il punto di minimo che è un **PUNTO DI MINIMO LOCALE**.

1.2.7. *La concavità*

La concavità indica se la curva è rivolta verso l'altro o verso il basso. Per capire questo concetto consideriamo una parabola.

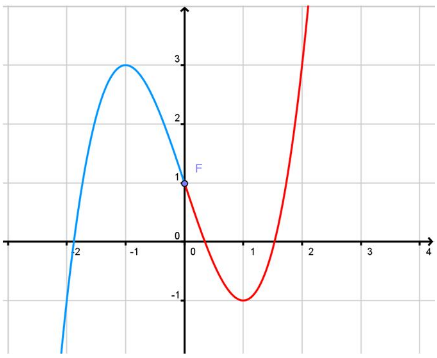
Le parabole si dividono in due categorie: quelle rivolte verso l'alto (a > 0) e quelle rivolte verso il basso (a < 0).

- Si dice che **LA CONCAVITÀ È POSITIVA** se la curva è rivolta verso l'alto
- Si dice che **LA CONCAVITÀ È NEGATIVA** se la curva è rivolta verso il basso.

Una curva può avere dei tratti in cui ha concavità positiva e dei tratti in cui ha concavità negativa.

Ad esempio, la curva seguente ha concavità variabile:

$$y = x^3 - 3x + 1$$



Fino al punto $F(0,1)$ la concavità è negativa: la curva è cioè rivolta verso il basso.

Da lì in poi la concavità diventa positiva.

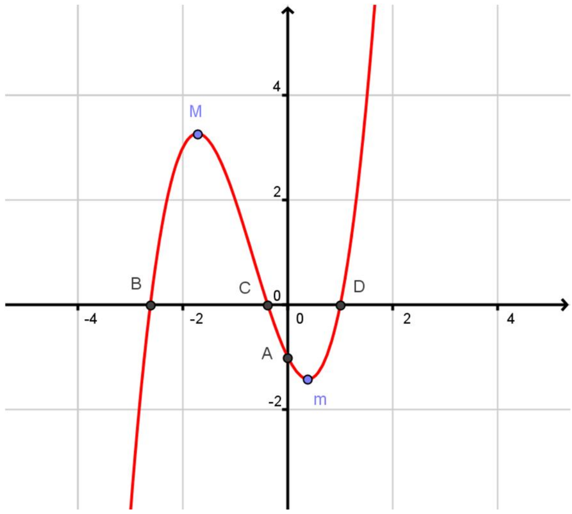
Il punto F, nel quale si passa da una concavità all'altra si chiama **PUNTO DI FLESSO**.

1.3. *Studio del grafico*

Nelle pagine seguenti sono raccolti esempi di studio grafico di funzione.

Esempio1:

$$y = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$$



Dominio $(-\infty; +\infty)$

Simmetrie: ne pari ne dispari

Intersezione con l'asse y: $A(0;-1)$

Intersezione con l'asse x: $B\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2};0\right)$ $C\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2};0\right)$ $D(1;0)$

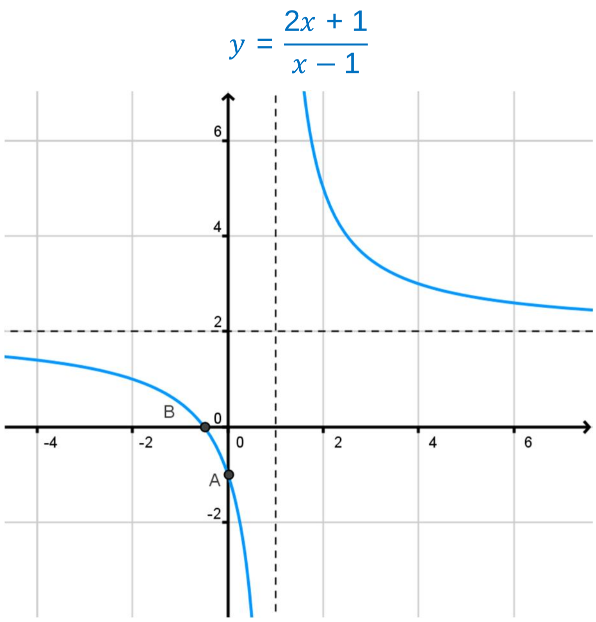
Segno: $f(x) > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \quad V \quad x > 1$

Asintoti: nessuno

Massimi e minimi: $P_{min}\left(\frac{-2+\sqrt{10}}{3};\frac{25-20\sqrt{10}}{27}\right)$ $P_{max}\left(\frac{-2-\sqrt{10}}{3};\frac{25+20\sqrt{10}}{27}\right)$

Flessi: $P_F\left(-\frac{2}{3};\frac{25}{17}\right)$

Esempio 2:



Dominio $(-\infty; 1)\ V\ (1; +\infty)$

Simmetrie: ne pari ne dispari

Intersezione con l'asse y: $A(0; -1)$

Intersezione con l'asse x: $B\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

Segno: $f(x) > 0 \rightarrow x < -\frac{1}{2} \quad V \quad x > 1$

Asintoto verticale in $x = 1$

Asintoto orizzontale in $y = 2$

Massimi e minimi: nessuno

Flessi: nessuno

1.4. ***Studio della funzione***

Lo studio di una funzione consiste nel disegnare il grafico data l'espressione matematica di una funzione.

Esiste un procedimento da seguire per arrivare a disegnare la funzione ed esistono degli strumenti matematici, che vedremo nei prossimi capitoli, per calcolare quello che ci serve.

Uno studio di funzione inizia con l'espressione matematica di una funzione:

$$y = f(x)$$

E' quindi necessario:

- Calcolare il dominio
- Trovare eventuali simmetrie
- Trovare le intersezioni con gli assi
- Studiare il segno della funzione
- Trovare eventuali asintoti
- Studiare la monotonia della funzione
- Studiare la concavità della funzione
- Fare il grafico

Nei prossimi capitoli impareremo a calcolare tutte queste cose.

2.DOMINIO, SIMMETRIE E SEGNO

In questo capitolo vedremo come calcolare il dominio della funzione senza conoscerne il grafico, come trovare eventuali simmetrie e come studiare il segno della funzione.

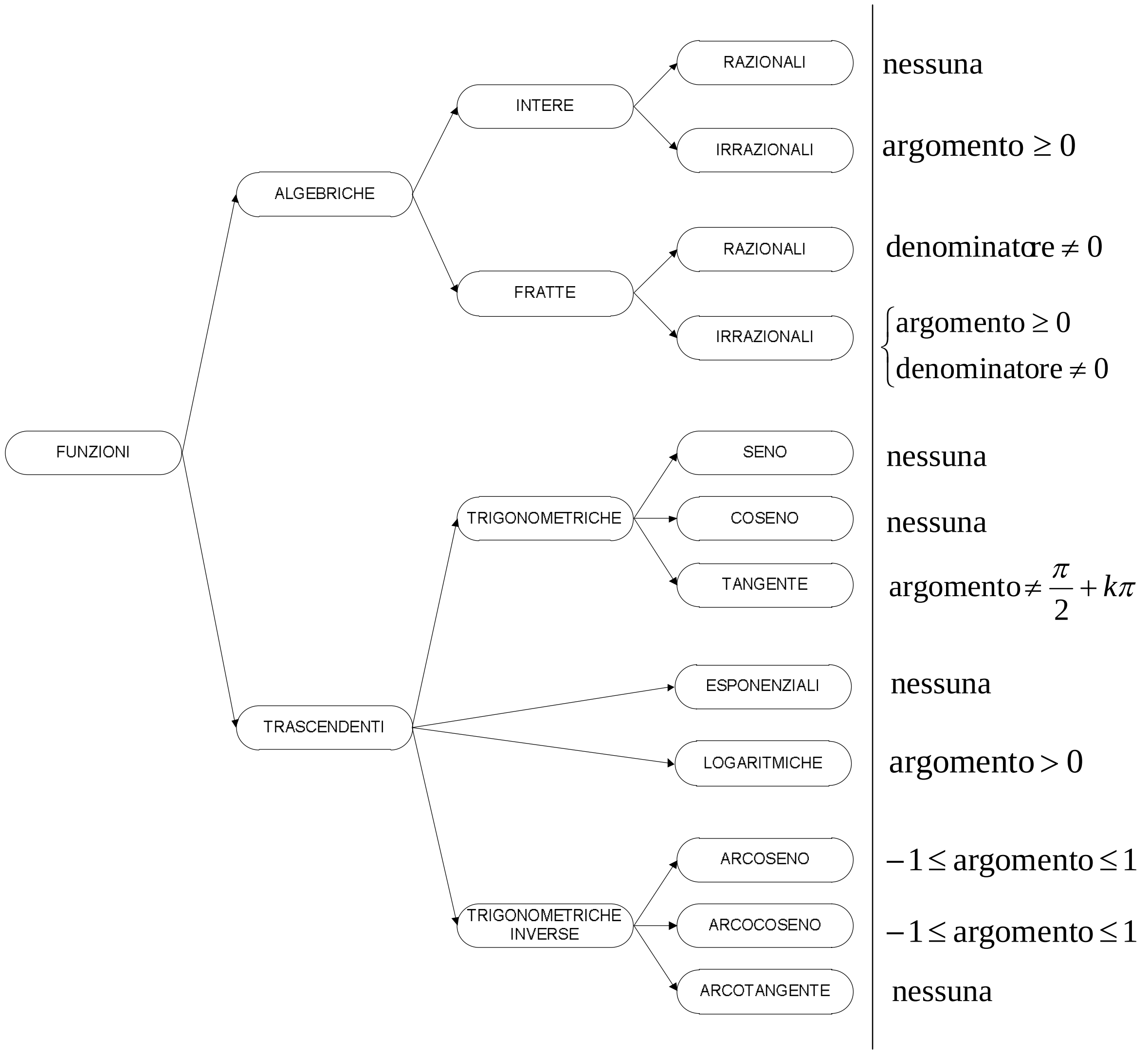
2.1. *Il calcolo del dominio*

Abbiamo detto che il dominio è la porzione di spazio in cui la funzione esiste. Quindi sarà sufficiente capire quali sono le condizioni che permettono ad una funzione di esistere.

E' quindi necessario osservare la funzione, capire quali sono le condizioni di esistenza, impostare un sistema e risolverlo.

Cominciamo col capire quali sono le condizioni sotto cui una funzione esiste, caso per caso.

Nello schema seguente sono riportate tutte le funzioni che si possono trovare con le relative condizioni di esistenza:



Per capire quali equazioni si devono scrivere è sufficiente analizzare lo schema e domandarsi se i vari tipi di funzione sono presenti in quella che stiamo analizzando.

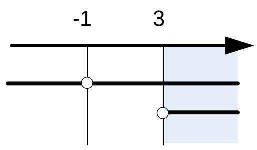
Esempio 1

$$y = \frac{\ln(x-3)}{x+1}$$

- La funzione non è intera.
- La funzione è fratta quindi ci sarà una condizione corrispondente: $x \neq -1$
- La funzione non è irrazionale.
- La funzione non è trigonometrica.
- La funzione non è trigonometrica inversa.
- La funzione non è esponenziale.
- La funzione è logaritmica quindi ci sarà una condizione corrispondente: $x - 3 > 0$

Abbiamo individuato 2 condizioni di esistenza e quindi dobbiamo metterle a sistema. Una volta risolto il sistema troviamo il dominio.

$$\begin{cases} x \neq -1 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x > 3 \end{cases}$$



Quindi il domino è:

$$(-3; +\infty)$$

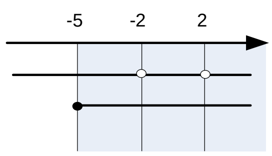
Esempio 2

$$y = \frac{\sqrt{x+5}}{x^2-4}$$

- La funzione non è intera.
- La funzione è fratta quindi ci sarà una condizione corrispondente: $x^2 - 4 \neq 0$
- La funzione è irrazionale quindi ci sarà un condizione corrispondente a $x + 5 \geq 0$
- La funzione non è trigonometrica.
- La funzione non è trigonometrica inversa.
- La funzione non è esponenziale.
- La funzione non è logaritmica.

Il sistema da risolvere è:

$$\begin{cases} x^2 - 4 \neq 0 \\ x + 5 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x \geq -5 \end{cases}$$



Quindi il dominio è:

$$[-5;-2) \quad V \quad (-2;2) \quad V \quad (2;+\infty)$$

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}: x \geq -5, x \neq \pm 2\}$$

RICORDA: PER CALCOLARE I DOMINIO BISOGNA RISOLVERE UN SISTEMA CON TUTTE LE CONDIZIONI DI ESISTENZA

2.2. *Ricerca delle simmetrie*

Come secondo punto è necessario cercare eventuali simmetrie rispetto all'asse y o rispetto all'origine. In alte parole è necessario capire se la funzione è pari, se è dispari o se ne non è ne pari ne dispari.

E' necessario partire dalle definizioni di parità e di disparità:

- una funzione è pari se $f(-x) = f(x)$
- una funzione è dispari se $f(-x) = -f(x)$

Calcoliamo quindi $f(-x)$ cambiano il segno alla x e svolgendo i calcoli. Quindi confrontiamo il risultato ottenuto con la $f(x)$.

E' necessario ricordare che il seno e la tangente sono unzioni dispari:

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

e che il coseno è una funzione pari:

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

Esempio 1

$$y = \boldsymbol{x^2 - 4}$$

Calcolo di $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x)^2 - 4 = \boldsymbol{x^2 - 4}$$

Si vede che la funzione è pari poiché $f(-x) = f(x)$

Esempio 2

$$y = \mathbf{sin}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{2}\boldsymbol{x}$$

Calcolo di $f(-x)$:

$$f(-x) = \sin(-x) + 2(-x) = -\sin(x) - 2x = -[\mathbf{sin}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{2}\boldsymbol{x}]$$

Si vede che la funzione è dispari poiché $f(-x) = -f(x)$

Esempio 3

$$y = \frac{\boldsymbol{x} - \mathbf{3}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x}}$$

Calcolo di $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{(-x) - 3}{2(-x)} = \frac{-x - 3}{-2x} = \boldsymbol{\frac{x + 3}{2x}}$$

Si vede che la funzione non è né pari né dispari poiché $f(-x)$ è diversa sia da $f(x)$ che da $-f(x)$.

RICORDA: PER TROVARE EVENTUALI SIMMETRIE È NECESSARIO CALCOLARE $f(-x)$ E CONFRONTARLA CON $f(x)$

2.3. *Studio del segno*

Dopo aver determinato il dominio di una funzione, cancelliamo dal piano cartesiano le zone in cui sappiamo che la funzione non esiste.

Otteniamo così delle bande verticali in cui la funzione c'è e altre, cancellate, in cui la funzione non c'è.

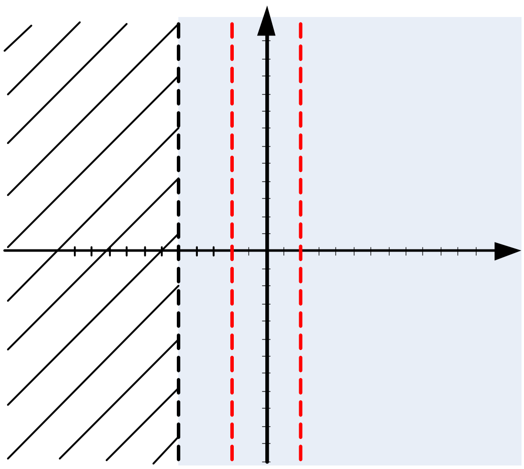
Ad esempio, consideriamo la funzione:

$$y = \frac{\sqrt{x + 5}}{x^2 - 4}$$

Abbiamo già calcolato il dominio nel paragrafo precedente:

$$[-5; -2) \quad V \quad (-2; 2) \quad V \quad (2; +\infty)$$

Sul grafico possiamo cancellare la parte di piano precedente a $x = -5$ e segnare con delle linee verticale le discontinuità in $x = \pm 2$



Sappiamo che la funzione sta nella parte in grigio, ma non sappiamo però se la funzione sta sopra o sotto l'asse delle y.

Per trovare il segno di una funzione si procede cercando per quali valori di x la funzione è positiva. Gli altri si troveranno di conseguenza.

Dobbiamo quindi calcolare:

$$f(x) \geq 0$$

ovvero:

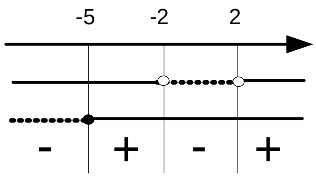
$$\frac{\sqrt{x+5}}{x^2-4} \geq 0$$

Si tratta di una frazione che è positiva quando il numeratore e il denominatore hanno segno concorde:

$$N \geq 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{x+5} \geq 0 \quad x \geq -5$$

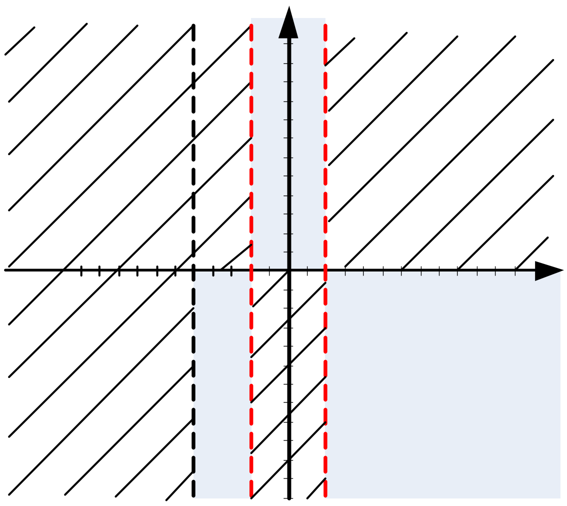
$$D > 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4 > 0 \quad \rightarrow \quad x < -2 \ V \ x > 2$$

Studio del segno:



Dunque il grafico di prima può essere completato togliendo le parti di piano in cui la funzione non c'è di sicuro.

Sappiamo infatti che la funzione è negativa tra -5 e -2, quindi in quella parte di piano starà sicuramente sotto l'asse x. Possiamo perciò cancellare la parte superiore all'asse x



RICORDA: PER STUDIARE IL SEGNO BISOGNA PORRE $f(x) \geq 0$

3.I LIMITI E LA RICERCA DEGLI ASINTOTI

Abbiamo visto che se si vuole calcolare il valore di una funzione in un punto, è necessario sostituire alla x il numero scelto e calcolare la y. Il valore della funzione si chiama immagine.

Non sempre però è possibile fare questa cosa. Consideriamo ad esempio la funzione:

$$y = \frac{1}{x}$$

L'immagine in $x = 0$ non esiste poiché il denominatore non può mai annullarsi.

In realtà esiste un modo per capire cosa succede alla funzione quando $x = 0$.

Si tratta di utilizzare un nuovo operatore matematico che consente ci capire cosa succede alla funzione quando la x si avvicina sempre di più al valore 0, senza arrivarci.

Si tratta dell'operatore **LIMITE**.

Il limite si scrive nel modo seguente:

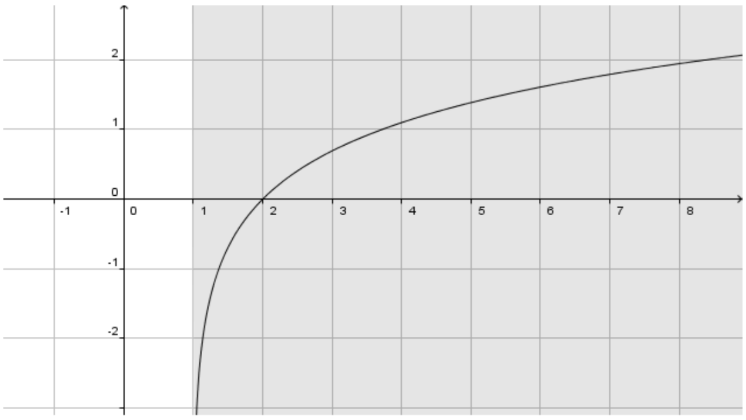
$$\lim_{x \to c} f(x) = m$$

3.1. *Limite destro e limite sinistro*

Immaginiamo di avere una funzione come il logaritmo, che esiste solo se l'argomento è maggiore di zero:

$$y = \ln(x - 1)$$

Il grafico di questa funzione mostra che il campo di esistenza è $x > 1$.



Questo significa che se vogliamo sapere cosa succede nel punto $x = 1$, incontreremo qualche problema.

Innanzi tutto, avvicinandoci a $x = 1$, la funzione diventa sempre più piccola: si dice che tende a meno infinito, cioè a numeri molto grandi in valore assoluto, con il segno meno davanti.

Ma non è tutto. Possiamo avvicinarci al punto $x = 1$ solo arrivando da destra, perché a sinistra di quel punto la funzione non esiste.

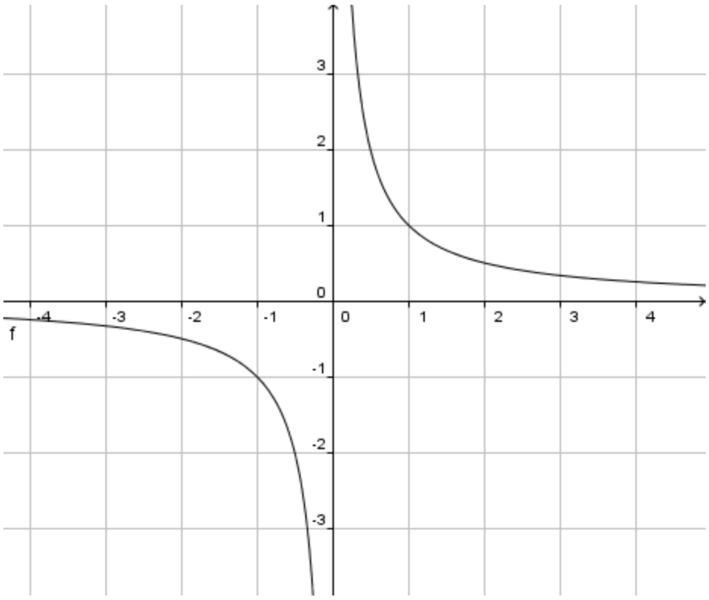
Si dice che esiste il limite destro e si scrive:

$$\lim_{x\to 1^+} \ln(x+1) = -\infty$$

Ora consideriamo la funzione:

$$y = \frac{1}{x}$$

Per $x = 0$ la funzione ha un asintoto ma questa volta il comportamento cambia se ci sia avvicina all'asintoto da destra o da sinistra.



Diciamo che la funzione ha limite sinistro pari a:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

E limite destro pari a:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Inoltre questa funzione presenta anche un asintoto orizzontale.

Infatti quando la x tende all'infinito, la y tende a 0.

Possiamo quindi scrivere:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$$

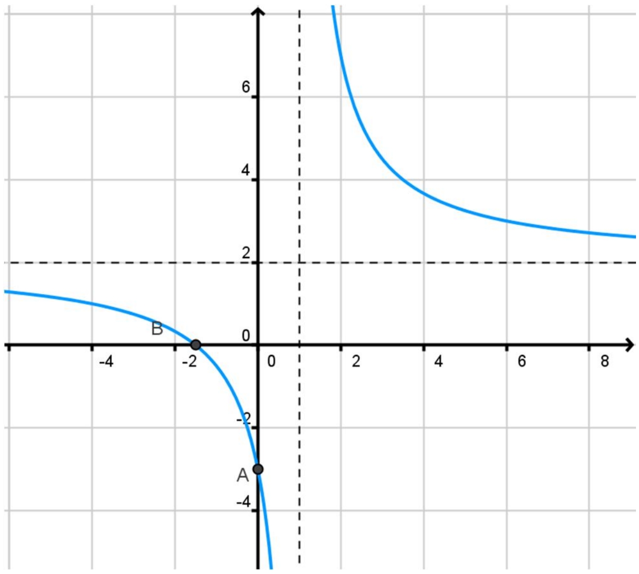
Prima di imparare a calcolare i limiti è necessario imparare a scriverli correttamente osservando il grafico.

In realtà nello studio di funzione i limiti saranno calcolati a partire dalla funzione, allo scopo di disegnarne il grafico.

Possiamo già anticipare che i limiti servono per trovare gli asintoti della funzione e per calcolarne l'equazione.

Esempio 1:

$$y = \frac{2x + 3}{x - 1}$$



L'asintoto verticale ha equazione $x = 1$ e i limiti corrispondenti sono:

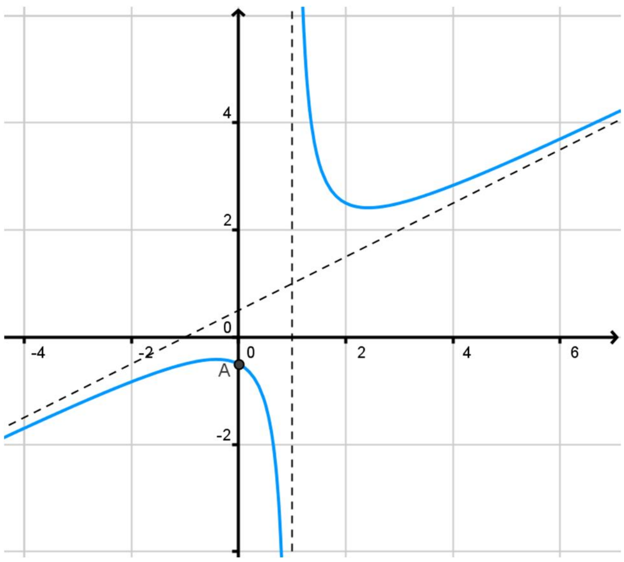
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x + 3}{x - 1} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{2x + 3}{x - 1} = +\infty$$

L'asintoto orizzontale ha equazione $y = 2$ e i limiti corrispondenti sono:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x + 3}{x - 1} = 2 \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{2x + 3}{x - 1} = 2$$

Esempio 2:

$$y = \frac{x^2 + 1}{2x - 2}$$



L'asintoto verticale ha equazione $x = 1$ e i limiti corrispondenti sono:

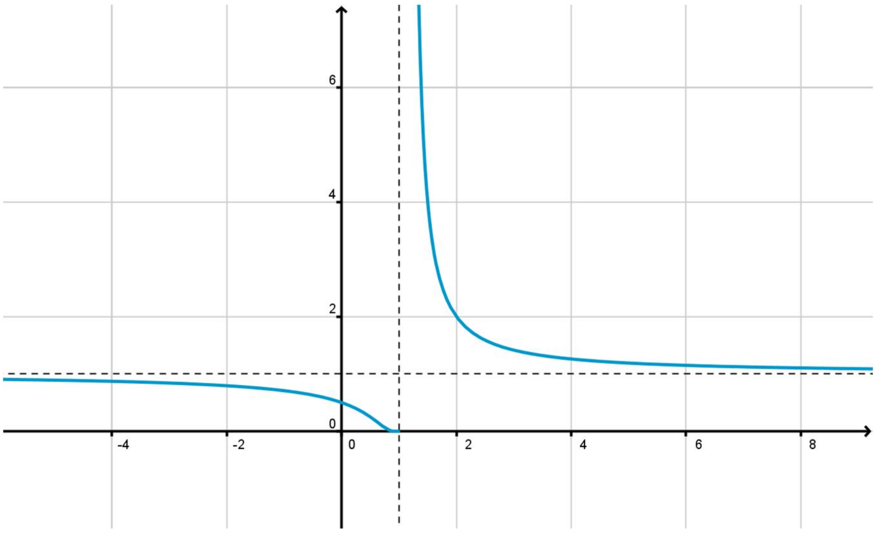
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{2x-2} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{2x-2} = +\infty$$

Non esistono asintoti orizzontali. I limiti per $x \to \pm\infty$ sono

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x+3}{x-1} = +\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{2x+3}{x-1} = -\infty$$

Esempio 3:

$$y = 2^{\frac{1}{x-1}}$$



L'asintoto verticale ha equazione $x = 1$ e i limiti corrispondenti sono:

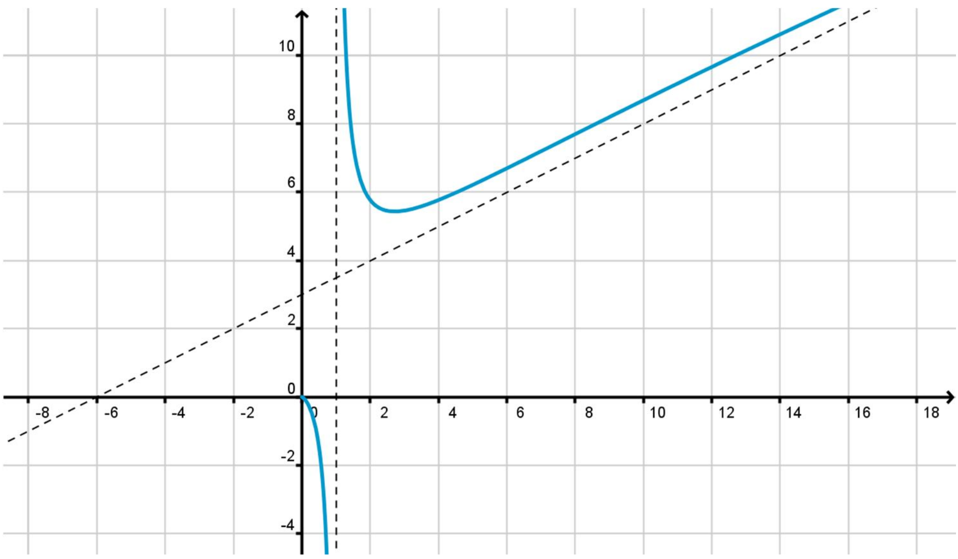
$$\lim_{x\to 1^-} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0 \qquad \lim_{x\to 1^+} 2^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$$

L'asintoto orizzontale ha equazione $y = 1$. I limiti corrispondenti sono:

$$\lim_{x\to +\infty} 2^{\frac{1}{x-1}} = 1 \qquad \lim_{x\to -\infty} 2^{\frac{1}{x-1}} = 1$$

Esempio 4:

$$y = \frac{x+2}{\ln x}$$



L'asintoto verticale ha equazione $x = 1$ e i limiti corrispondenti sono:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x+2}{\ln x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{x+2}{\ln x} = +\infty$$

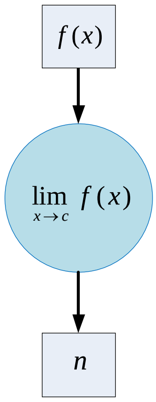
Non esistono asintoti orizzontali. I limiti per $x \to \pm\infty$ sono

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{\ln x} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x+2}{\ln x} = -\infty$$

C'è un asintoto obliquo di equazione $y = \frac{1}{2}x + 3$

3.2. *Il calcolo del limite*

Possiamo vedere il limite come una macchina che prende in ingresso una funzione e da come risultato un numero.



Quando ci si trova di fronte ad un limite da risolvere, la prima cosa da fare è sostituire alla x il valore indicato dal limite. Ad esempio, si calcoli il limite:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-1}{x}$$

Sostituiamo il 2 alla x:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-1}{x} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

3.2.1. *L'infinito*

Con il limite compare il concetto di **INFINITO**.

La prima cosa da tenere presente è che l'infinito non è un numero, ma un concetto. E' quindi necessario fare un paio di considerazioni.

Un numero qualsiasi diviso per un numero che tende a infinito da come risultato un numero che tende a zero. Si pensi ad esempio ad una torta che viene divisa per moltissime persone: si può affermare che alla fine le fette sono così piccole da essere quasi inesistenti anche se non si avrà mai davvero zero come risultato: la torta non può sparire!

Attenzione: non si può scrivere $\frac{A}{\infty}$, ma è necessario utilizzare un limite:

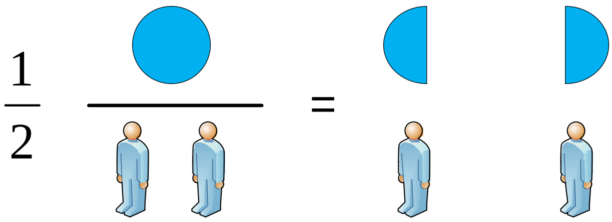
$$\lim_{x\to\infty}\frac{A}{x}=0$$

Un numero qualsiasi diviso un numero che tende a zero da come risultato infinito. Anche qui è necessario utilizzare un limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{A}{x}=\infty$$

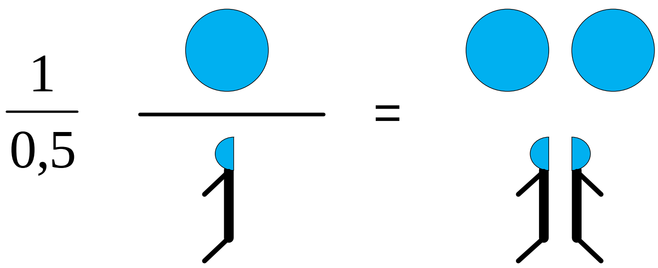
Per capire quest'ultima affermazione è necessario ragionare sul significato di divisione.

Dividere per numeri maggiori di 1 è semplice da un punto di vista concettuale:



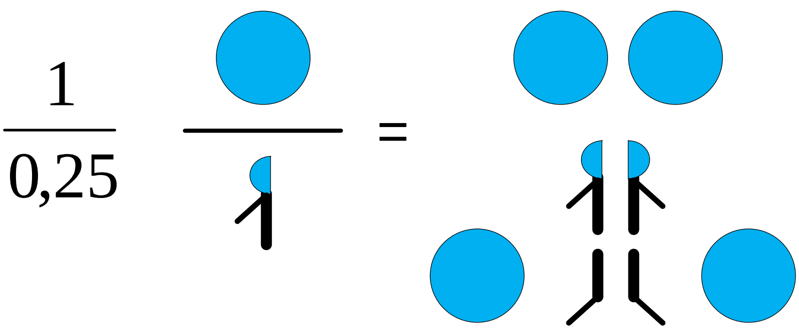
Nell'esempio, una torta viene assegnata a due persone, cioè ad ogni persona tocca mezza torta.

Per dividere per un numero minore di 1 è necessario immaginare di assegnare una torta ad una parte di persona. Ad esempio, per dividere per 0,5 si può immaginare di assegnare una torta ogni mezza persona:



Quindi, una persona intera, avrà 2 torte.

Dividendo per un numero ancora più piccolo, otteniamo 4 torte per una sola persona.



Possiamo immaginare di dividere per un numero così piccolo, tendente a 0, che alla singola persona spettano moltissime torte, tendenti ad infinito.

Ovviamente non possiamo scrivere

$$\frac{1}{0}$$

E' sbagliato poiché non è possibile dividere per zero, ma possiamo scrivere:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$$

E' necessario prestare attenzione al fatto che l'infinito può essere positivo, cioè $+\infty$, oppure negativo, cioè $-\infty$.

Il fatto che l'infinito sia positivo o negativo dipende dal segno della frazione.

Consideriamo ad esempio di dividere un numero positivo (ad esempio 1) per un numero molto piccolo, tendente a zero, ma negativo, ad esempio -0,000000001.

Otterremo un numero molto grande in valore assoluto, ma negativo.

E' quindi necessario prestare attenzione al segno dello 0.

Infatti, quando abbiamo un numero del tipo 0,000001 possiamo scrivere 0^+ e quando abbiamo un numero del tipo -0,00001 possiamo scrivere 0^-.

Per capire se si tratta di 0^- o di 0^+ è necessario analizzare l'operazione da cui risulta lo zero.

<u>Esempio 1</u>

Risolviamo il seguente limite:

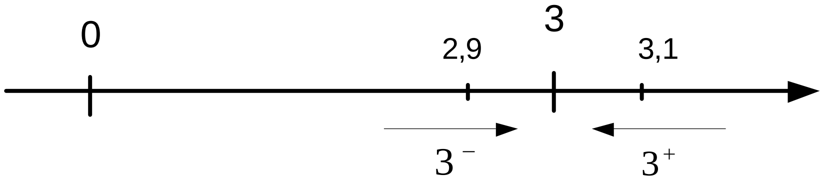
$$\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}$$

Il denominatore si annulla poiché:

$$3^+-3=0$$

Ma la domanda che dobbiamo porci è: si tratta di 0^- o di 0^+?

Ragioniamo sulla linea dei numeri:



Se ci avviciniamo a 3 da 3^+ non arriveremo veramente a 3, ma otterremo 3,0000001, con moltissimi zeri prima dell'1.

In questo caso, quando sottraiamo a 3^+ un numero più piccolo otteniamo un risultato positivo. Quindi:

$$3^+-3=0^+$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Calcoliamo invece il limite:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3}$$

Questa volta ci avviciniamo a 3 dalla parte di 2,9. Non arriveremo veramente a 3, ma ci avvicineremo sempre più. Avremo cioè a che fare con un numero del tipo 2,99999999, cioè ad un 3 meno qualcosa.

In questo caso, il numero che stiamo sottraendo (3) è più grande:

$$2{,}999999 - 3 = -0{,}000001$$

Cioè:

$$3^- - 3 = 0^-$$

Quindi:

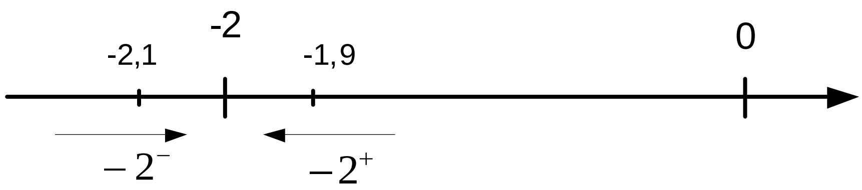
$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Esempio 2

Risolviamo il seguente limite:

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x+2}$$

Anche qui ragioniamo sulla linea dei numeri:



Questa volta, dice che la x tende a -2^- significa avvicinarsi a -2 dalla parta di -2,1. Avremo cioè un numero del tipo -2,0000001.

Il denominatore quindi sarà:

$$-2{,}00001 + 2 = -0{,}00001$$

ovvero:

$$-2^- + 2 = 0^-$$

e quindi:

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Se invece consideriamo:

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{1}{x+2}$$

ci avviciniamo a -2 dalla parte di -1,9, cioè:

$$-1{,}999999 + 2 = +0{,}00001$$

e quindi:

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{-2^+ + 2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

3.2.2. ***Operazioni con i limiti***

Se vogliamo svolgere delle operazioni tra limiti, valgono le seguenti regole:

Il limite di due funzioni sommate o sottratte $f(x) \pm g(x)$ è uguale alla somma o alla sottrazione dei limiti delle due funzioni:

$$\lim_{x\to c} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$$

Il limite di due funzioni moltiplicate o divise è uguale alla somma o alla divisione dei limiti delle due funzioni:

$$\lim_{x\to c} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$$

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$$

3.2.3. *Forme indeterminate*

Le operazioni che abbiamo appena visto sono semplici finché il risultato è un numero finito o un infinito.

In alcuni casi però possono presentarsi alcune forme che vengono chiamate forme indeterminate.

Sono chiamate così perché non è possibile sapere a priori quale sarà il risultato dell'operazione. Il risultato è quindi indeterminato, ma questo non significa che non ci sia.

Le forme indeterminate sono le seguenti:

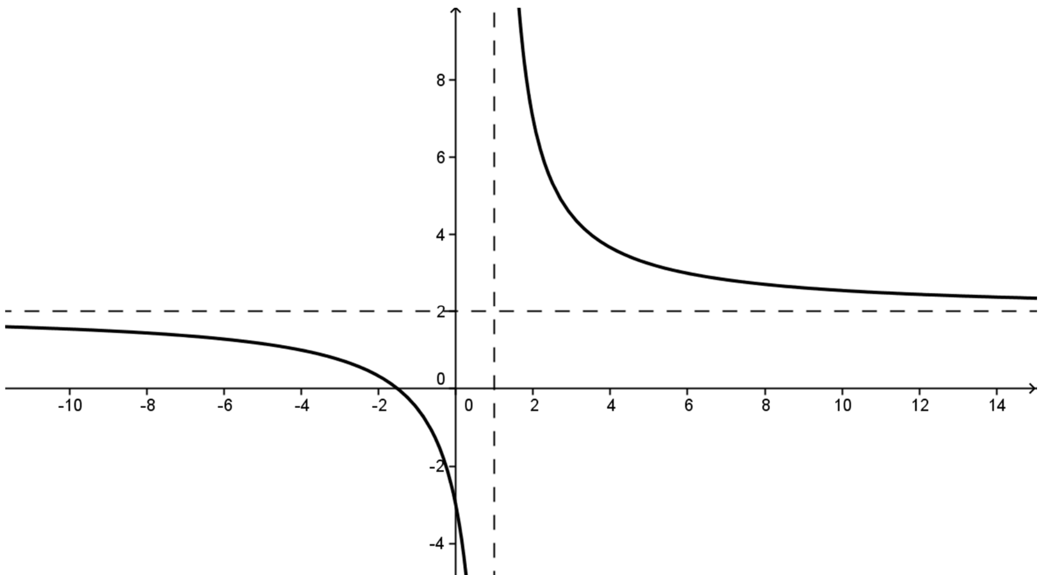
$$+\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0}$$

Per capire il concetto di forma indeterminata, si consideri la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Questa forma si presenta, ad esempio, con la funzione seguente quando la x tende ad ∞.

$$y = \frac{2x + 3}{x - 1}$$

Il grafico di questa funzione è rappresentato di seguito:



Come si può notare dal grafico, quando la x tende ad infinito, la $f(x)$ tende a 2.

Quindi il limite deve essere il seguente:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 3}{x - 1} = 2$$

Se però andiamo a sostituire alla x l'infinito, otteniamo:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 3}{x - 1} = \frac{2\infty + 3}{\infty - 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

La forma è indeterminata perché non sappiamo quanto vale, ma una volta che avremo imparato a risolvere le forme indeterminate saremo in grado di dire che questo limite fa 2.

Quando si presenta una forma indeterminata non è possibile risolvere il limite in maniera semplice ed è necessario utilizzare altri strumenti matematici.

Le tabelle seguenti mostrano tutti i possibili casi per le operazioni di somma/sottrazione, prodotto e divisione di due limiti:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to c} g(x) = M$$

Sono evidenziate le forme indeterminate che abbiamo già visto prima:

ADDIZIONE/SOTRAZIONE	L	$+\infty$	$-\infty$
M	$L \pm M$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty + \infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty + \infty$	$-\infty$

PRODOTTO	$L \neq 0$	0	∞
$M \neq 0$	$L \cdot M$	0	∞
0	0	0	$0 \cdot \infty$
∞	∞	$0 \cdot \infty$	∞

QUOZIENTE	$L \neq 0$	0	∞
$M \neq 0$	$\frac{L}{M}$	0	∞
0	∞	$\frac{0}{0}$	∞
∞	0	0	$\frac{\infty}{\infty}$

3.2.4. ***Soluzione delle forme indeterminate***

Abbiamo visto che quando un limite da come risultato una forma indeterminata non possiamo dire quale sia il risultato. In questo paragrafo cercheremo di capire come si risolve una forma indeterminata.

I limiti che possono presentarsi nell'analisi si dividono in due categorie:

- Limiti di funzioni algebriche con l'infinito, cioè del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ oppure $+\infty-\infty$
- Limiti di funzioni algebriche con lo zero, del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $0\cdot\infty$
- Limiti di funzioni trascendenti con l'infinito, cioè del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ oppure $+\infty-\infty$
- Limiti di funzioni trascendenti con lo zero, del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $0\cdot\infty$

Al pari delle equazioni e delle disequazioni, è fondamentale identificare il tipo di limite per poter capire qual è il metodo corretto da utilizzare.

Limite algebrico con indeterminazione del tipo ∞/∞ ***oppure*** $+\infty-\infty$

Quando ci troviamo di fronte a forme indeterminate in cui compare l'infinito si può utilizzare un metodo noto come confronto dell'ordine d'infinito.

In pratica si tratta di stabilire quale dei due termini che generano l'indeterminazione è più "forte" dell'altro.

Si consideri ad esempio la funzione:

$$y=\frac{x^2-2}{x}$$

Se calcoliamo il limite per x che tende ad infinito, otteniamo una forma indeterminata:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2}{x}=\frac{\infty^2-2}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}$$

L'infinito al numeratore è però elevato al quadrato e quindi è di ordine superiore di quello al denominatore. E' lui quello più "forte", che stabilisce il risultato. Questo limite ha come risultato infinito.

Un modo più rigoroso di trattare questo tipo di limiti è:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{1}=\infty\left(1-\frac{2}{\infty}\right)=\infty$$

Questo metodo è utilissimo per risolvere le indeterminazioni del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ che risultano da funzioni algebriche fratte.

Consideriamo ad esempio la funzione:

$$y=\frac{3x^2+2x-3}{-4x^2+4x-5}$$

Vogliamo calcolare il limite per x che tende a infinito:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-3}{-4x^2+4x-5}$$

Il calcolo di questo limite ci porta ad una forma indeterminata:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-3}{-4x^2+4x-5}=\frac{\infty}{\infty}$$

In questo caso però si può risolvere l'indeterminazione con il metodo del confronto tra infinitesimi. Per prima cosa raccogliamo il termine di ordine più alto, sia al numeratore che al denominatore:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(-4+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}=\frac{\left(3+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{\left(-4+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}=\frac{3+\frac{2}{\infty}-\frac{3}{\infty^2}}{-4+\frac{4}{\infty}-\frac{5}{\infty^2}}=-\frac{3}{4}$$

Limite algebrico con indeterminazione del tipo $0/0$ ***oppure*** $0\cdot\infty$

Quando invece ci troviamo di fronte ad indeterminazioni del tipo $\frac{0}{0}$ non si può confrontare l'ordine d'infinito (l'infinito non c'è!) e quindi resta un'unica via: bisogna scomporre il polinomio al numeratore e quello al denominatore per poterli semplificare.

Per far questo si usano i metodi ripassati nella prima parte: i prodotti notevoli e la scomposizione con la formula del delta e con il metodo di Ruffini.

Può capitare che la funzione non sia scomponibile poiché contiene delle radici. Ad esempio:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}}{x^2-1}$$

In questo caso l'unica cosa che resta da fare è razionalizzare.

Limite trascendente con indeterminazione del tipo ∞/∞ ***oppure*** $+\infty-\infty$

Se invece abbiamo a che fare con funzioni trascendenti possiamo comunque confrontare l'infinito, ma quello che conta non è più l'ordine, cioè l'esponente che compare all'infinito, ma il tipo di funzione che da origine all'infinito.

Gli infiniti infatti non sono tutti uguali. L'infinito che deriva da un esponenziale è il più "forte" di tutti. Ad esempio, se confrontato con una potenza, sarà sempre lui a stabilire il valore del limite, a prescindere dal numero che compare all'esponente della potenza.

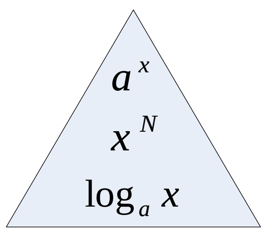
Cioè 2^x va ad infinito più rapidamente di x^{1000}.

Ad esempio:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^{x+5}}{\ln x}=\frac{\infty}{\infty}$$

Tuttavia, poiché al numeratore c'è un esponenziale, il risultato del limite sarà un infinito.

C'è quindi una sorta di gerarchia degli infiniti che prevede, al vertice della piramide, l'esponenziale e alla base il logaritmo.



***Limite trascendente con indeterminazione del tipo* $0/0$ *oppure* $0 \cdot \infty$**

Per questi limiti prodotti notevoli non ci servono poiché le funzioni sono trascendenti. In compenso possiamo usare gli infinitesimi equivalenti.

Il concetto che sta alla base dell'infinitesimo equivalente è che ogni funzione trascendente, quando il suo valore è molto piccolo, cioè vale circa zero, si può approssimare con un'altra funzione, algebrica e quindi più semplice.

Quando una funzione ha l'argomento che tende a zero si dice che è infinitesima. Ad esempio:

$$y = \log(x + 2)$$

è infinitesima quando x tende a -1 poiché:

$$\lim_{x \to -1} \log(x + 2) = 0$$

La funzione:

$$y = \sin(2x - 4)$$

È infinitesima quando x tende a 2 poiché;

$$\lim_{x \to 2} \sin(2x - 4) = 0$$

Quando una funzione è infinitesima, è possibile quindi approssimarla con un'altra funzione secondo lo schema seguente:

$$\sin[f(x)] \approx f(x)$$

$$\cos[f(x) - 1] \approx \frac{[f(x)]^2}{2}$$

$$\tan[f(x)] \approx f(x)$$

$$a^{f(x)} \approx f(x) + 1$$

$$\log_a[f(x) + 1] \approx f(x)$$

3.2.5. *I limiti fondamentali*

Esistono due limiti fondamentali che devono essere conosciuti a memoria. Il primo limite fondamentale riguarda la funzione trigonometrica seno:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Il secondo limite fondamentale è:

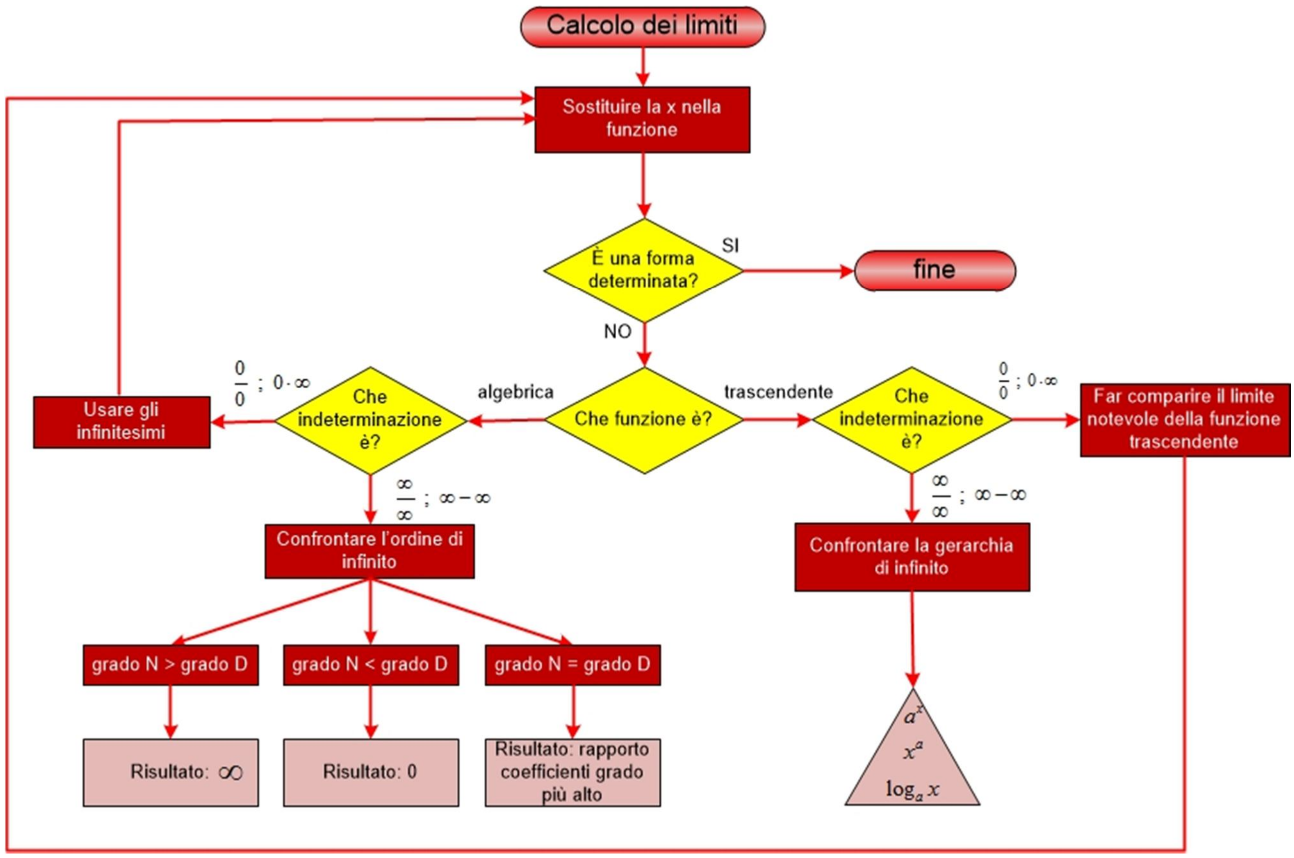
$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Questo limite spiega da dove viene il numero di Nepero.

Riassumendo:

	FUNZIONE ALGEBRICA	FUNZIONE TRASCENDENTE
INDETERMINAZIONE CON L'INFINITO	confronto dell'ordine di infinito (esponenti) razionalizzazione	confronto con la gerarchia dell'infinito (tipo di funzione)
INDETERMINAZIONE CON LO ZERO	semplificazione con prodotti notevoli razionalizzazione	Infinitesimi equivalenti

Lo schema seguente mostra il ragionamento da fare per risolvere i limiti:



3.3. *Teoremi sui limiti*

Esistono 3 teoremi sui limiti.

- teorema dell'unicità del limite
- teorema della permanenza del segno
- teorema del confronto

3.3.1. *Teorema di unicità del limite*

SE UNA FUNZIONE $f(x)$ AMMETTE UN LIMITE PER $x \to c$, ALLORA QUESTO LIMITE È UNICO.

In pratica non ci possono essere due limiti diversi per la stessa funzione nello stesso punto. Attenzione a non confondersi con le discontinuità. Lì si parla di limite destro o limite sinistro, qui invece si parla solo di limite.

3.3.2. *Teorema della permanenza del segno*

SE UNA FUNZIONE $f(x)$ AMMETTE UN LIMITE $l \neq 0$ PER $x \to c$, ALLORA ESISTE UN INTORNO DI C NEI PUNTI DEL QUALE, ESCLUSO AL PIÙ C, LA FUNZIONE HA LO STESSO SEGNO DI L.

In pratica, la funzione cambia segno solo passando attraverso l'asse delle x, quindi se il limite è diverso da $l = 0$ il segno della funzione sarà lo stesso del limite.

3.3.3. *Teorema del confronto o dei due carabinieri*

SE IN UN INTORNO DI UN PUNTO C, NEL QUALE SONO DEFINITE TRE FUNZIONI H(X), F(X) E G(X), RISULTA SEMPRE $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ E SE

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = l$$

ALLORA ANCHE:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

E' concetto del sandwich: se due funzioni esterne (le fette di pane) si toccando in un punto e quindi hanno lo stesso limite, la fetta di prosciutto all'interno non può far altro che toccare anch'essa nello stesso punto delle fette di pane, altrimenti sta uscendo dal panino e non è più compresa...

3.4. *Comportamento ai confini del campo di esistenza*

I limiti servono per studiare il comportamento della funzione ai confini del campo di esistenza, cioè servono per capire cosa fa la funzione là dove finisce il dominio.

Prendiamo, come esempio, la funzione:

$$y = \frac{1}{x-2}$$

Abbiamo visto che il dominio della funzione ha una discontinuità nel punto x=2. Questo vuol dire che quel punto non appartiene al dominio della funzione.

Il limite ci serve per capire cosa succede in questo punto:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

Nel punto x = 2 c'è un asintoto verticale. A destra dell'asintoto la funzione tende a $+\infty$ mentre a sinistra tende a $-\infty$.

GLI ASINTOTI VERTICALI SONO RETTE PERPENDICOLARI ALL'ASSE DELLE X.

SI TROVANO IN CORRISPONDENZA DELLE DISCONTINUITÀ NEL DOMINIO E SI CALCOLANO FACENDO TENDERE LA X AL VALORE CHE NON APPARTIENE AL DOMINIO.

Abbiamo visto che, a parte la discontinuità in $x = 2$, il dominio va da $-\infty$ a $+\infty$. Possiamo allora vedere cosa fa la funzione quando la x tende a $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

Questo vuol dire che quando la x tende all'infinito la funzione tende a zero.

Siamo di fronte ad un asintoto orizzontale.

GLI ASINTOTI ORIZZONTALI SONO RETTE PERPENDICOLARI ALL'ASSE DELLE Y. SI TROVANO FACENDO TENDERE LA X A $\pm\infty$

E' possibile che la funzione abbia asintoti che non sono ne verticali ne orizzontali. In questi casi si parla di asintoti obliqui.

Un asintoto è obliquo quando la sua equazione è una retta con un coefficiente angolare diverso da 0 e da ∞. Un asintoto obliquo ha equazione:

$$y = m \cdot x + q$$

Innanzi tutto, affinché una funzione abbia un asintoto obliquo, deve valere:

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Questa condizione è **NECESSARIA, MA NON È SUFFICIENTE**, per concludere che esiste un asintoto obliquo. Infatti, ci sono funzioni, come la parabola, che tendono ad ∞ quando la x tende a ∞, ma non hanno asintoti.

Per calcolare l'asintoto è necessario calcolare i due parametri che lo definiscono, e cioè il coefficiente angolare m e il termine noto q.

Per far ciò si usano le due formule seguenti, in successione:

$$\boldsymbol{m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}}$$

$$\boldsymbol{q = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx}$$

Dopo aver trovato il coefficiente angolare m, si usa questo valore per trovare q.

<u>Esempio</u>

Studiamo la funzione precedente:

$$y = \frac{x^2 + x}{x - 1}$$

Dominio: $(-\infty; 1)\ V\ (1; +\infty)$

Simmetrie:

$$f(-x) = \frac{x^2 - x}{-x - 1}$$

La funzione non è ne pari ne dispari.

Intersezione con gli assi:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{x^2 + x}{x - 1} \end{cases} \rightarrow \quad \frac{x^2 + x}{x - 1} = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + x = 0 \quad \rightarrow \quad x(x + 1) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

La funzione passa per i punti:

$$A\ (0; 0)$$

$$B\ (-1; 0)$$

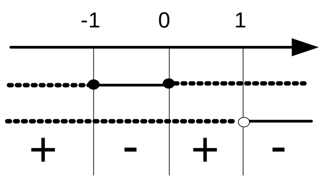
Positività:

$$\frac{x^2 + x}{x - 1} \geq 0$$

$$N \geq 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + x \geq 0 \quad \rightarrow \quad x(x + 1) \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \leq -1\ V\ \ x \geq 0$$

$$D > 0 \quad \rightarrow \quad x - 1 > 0 \quad \rightarrow x > 1$$

Studio del segno:



Asintoti verticali: cerchiamo l'asintoto verticale ai confini del campo di esistenza:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + x}{x - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + x}{x - 1} = +\infty$$

C'è un asintoto orizzontale di equazione $x = 1$.

Asintoti orizzontali:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x}{x - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x}{x - 1} = -\infty$$

Quindi non ci sono asintoti orizzontali.

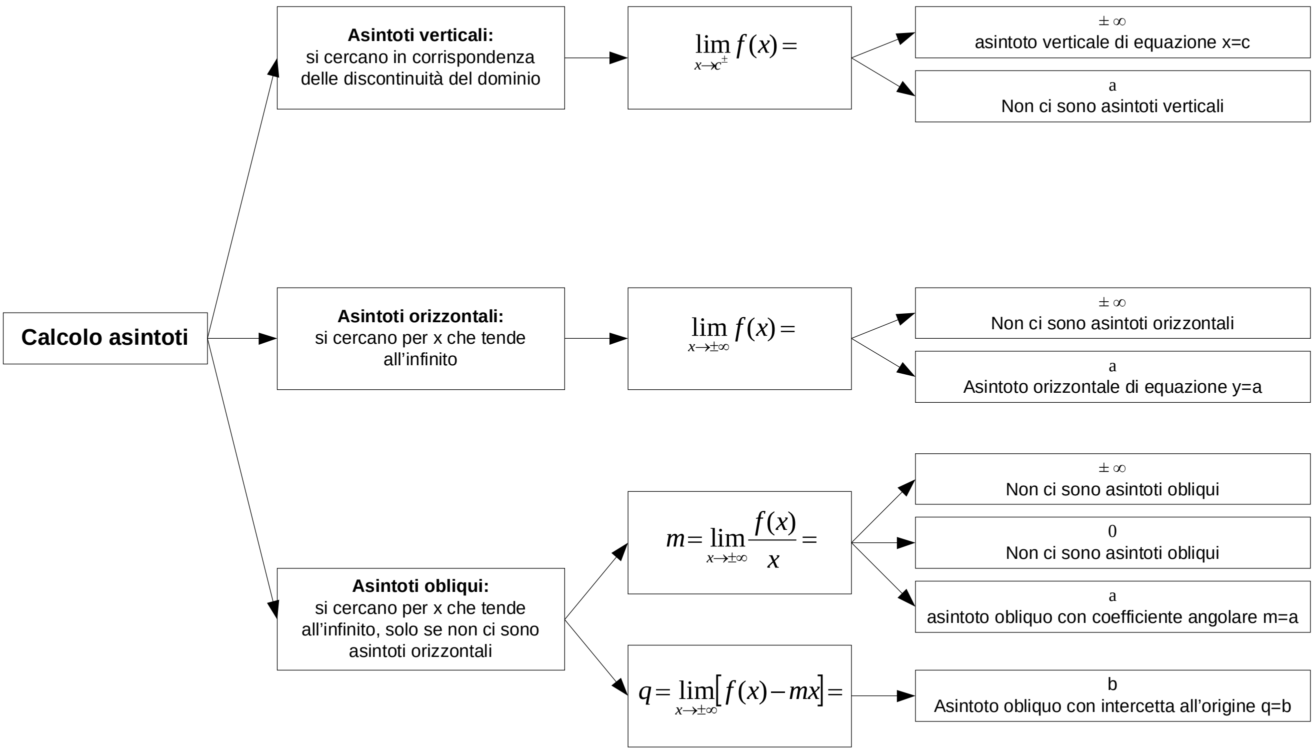
Asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x}{x(x - 1)} = 1$$

$$q = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x}{x - 1} - x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - x^2 + x}{x - 1} = 2$$

Quindi l'equazione dell'asintoto è: $y = x + 2$

Lo schema seguente mostra come ragionare per il calcolo degli asintoti.



3.5. *Discontinuità di una funzione*

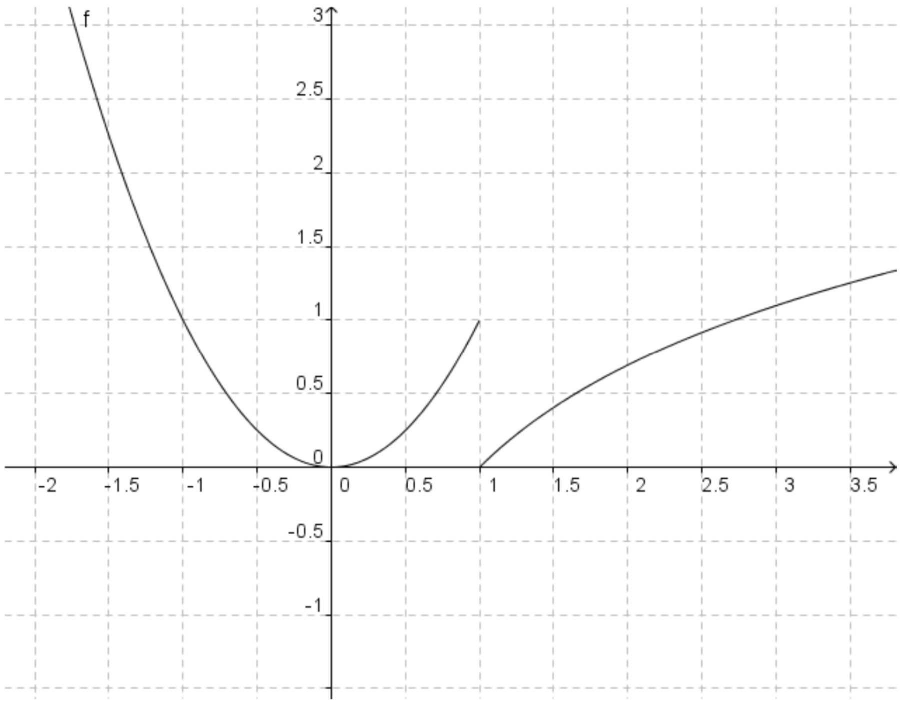
Lo studio dei limiti ci consente di parlare di quei casi in cui la funzione non è continua su tutto l'asse reale. Abbiamo già visto un tipo di discontinuità quando abbiamo parlato degli asintoti verticali. Questa discontinuità non è però l'unica che possiamo trovare.

Le discontinuità sono di tre tipi:

- discontinuità di prima specie o salto: in cui non c'è un asintoto verticale
- discontinuità di seconda specie o asintoto: in cui c'è un asintoto verticale
- discontinuità di terza specie o eliminabile

3.5.1. *Discontinuità di prima specie*

Nel punto di discontinuità il limite destro e il limite sinistro esistono entrambi, hanno valore finito, ma sono diversi. Una discontinuità di questo tipo si chiama salto.



Il grafico rappresenta la seguente funzione:

$$\begin{cases} y = ln(x) & se \ \ x > 1 \\ y = x^2 & se \ \ x \leq 1 \end{cases}$$

Il punto $x = 1$ è un punto di discontinuità di prima specie in quanto:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$$

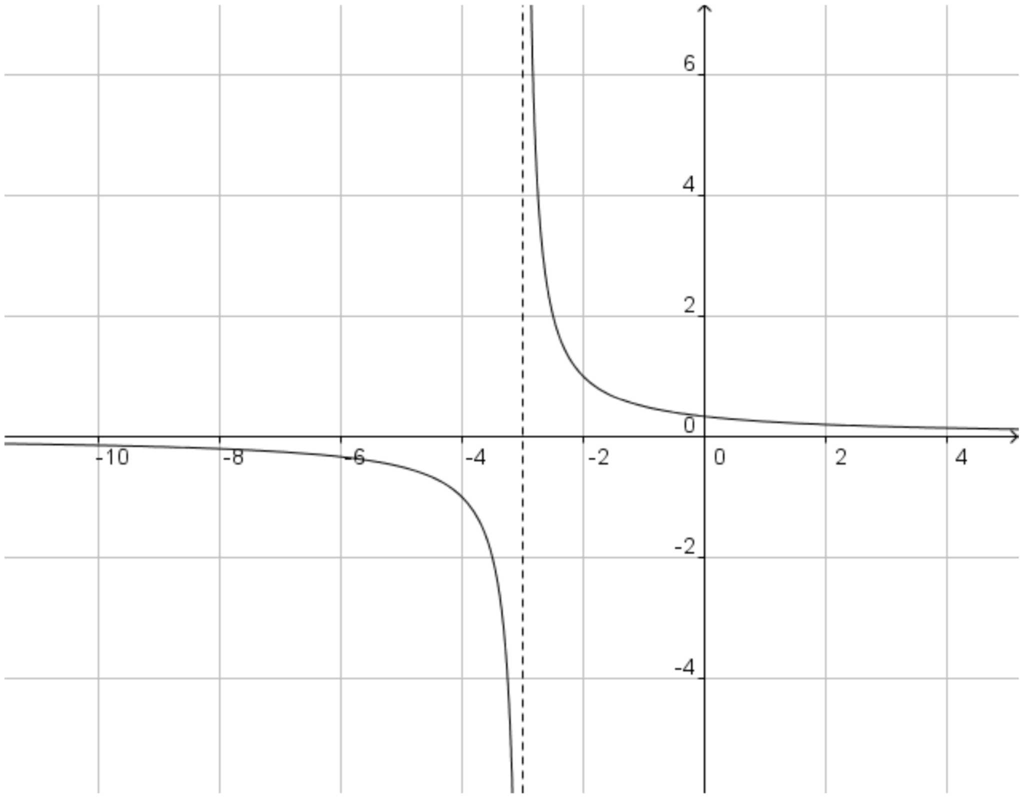
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$$

Riassumendo: **UNA DISCONTINUITÀ $x = c$ È DI PRIMA SPECIE SE RISULTA:**

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = a \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) = b \qquad con \ \ a \neq b$$

3.5.2. ***Discontinuità di seconda specie***

Nel punto di discontinuità il limite destro o il limite sinistro (oppure entrambi) sono infiniti.



Il grafico di fianco rappresenta la funzione seguente:

$$y = \frac{1}{x + 3}$$

Il punto x = 3 è un punto di discontinuità di seconda specie perché:

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$$

Riassumendo: **UNA DISCONTINUITÀ $x = c$ È DI SECONDA SPECIE SE RISULTA:**

$$\mathrm{LIM}_{x \to c^-} f(x) = +\infty \qquad \mathrm{LIM}_{x \to c^+} f(x) = -\infty$$

3.5.3. ***Discontinuità di terza specie o eliminabile***

Nel punto di discontinuità l'immagine della funzione o non esiste è diversa dal valore del limite.

Si chiama così perché le funzioni che presentano una discontinuità di questo tipo, se vengono diagrammate su un grafico sono continue. La discontinuità è, per così dire, formale, dipende cioè dalla forma in cui è scritta la funzione.

Consideriamo la funzione seguente:

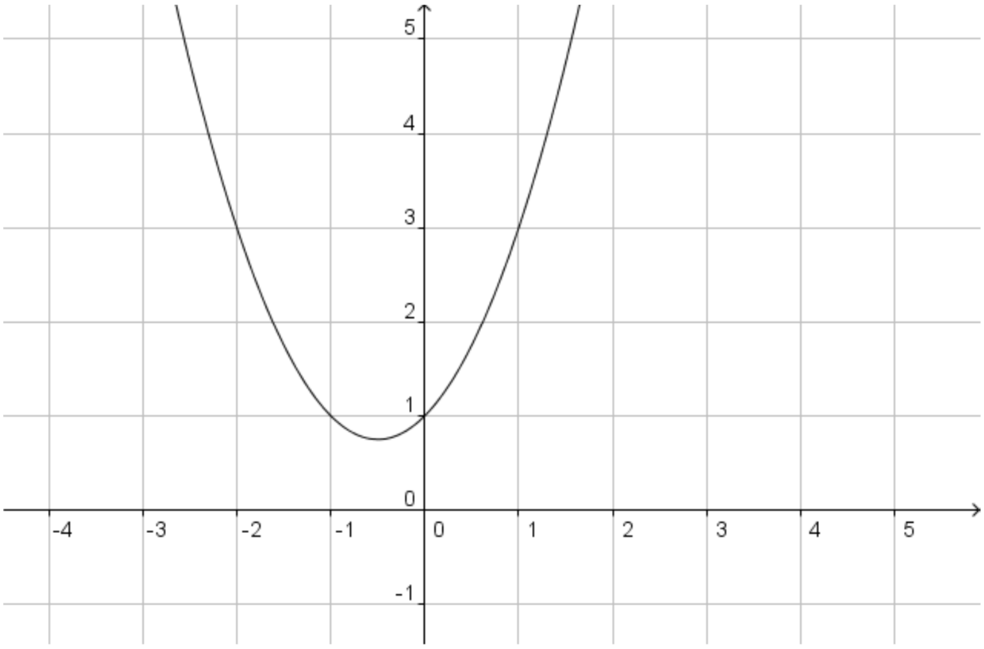
$$y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Scritta in questa forma la funzione presenta una discontinuità nel punto $x = 1$.

Con qualche passaggio matematico, però, possiamo eliminare la discontinuità:

$$y = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} = x^2+x-1$$

Infatti, se tracciamo il grafico di questa funzione, otteniamo una parabola:



Per vedere se il punto x = 1 è effettivamente una discontinuità calcoliamo l'immagine della funzione in quel punto e il limite:

$$f(1) = \frac{1^3-1}{1-1} = \frac{0}{0} \quad non\ esiste\ l'immagine\ di\ 1$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = 12$$

Il limite esiste ed ha un valore finito, ma l'immagine non esiste.

3.6. *Teoremi sulle funzioni continue*

Ci sono due importanti teoremi sulle funzioni continue.

3.6.1. *Teorema di esistenza degli zeri*

SE F(X) È UNA FUNZIONE CONTINUA IN UN INTERVALLO [A,B] AI CUI ESTREMI ASSUME VALORI DISCORDI, CIOÈ $f(a) \cdot f(b) < 0$, L'EQUAZIONE $f(x) = 0$ HA ALMENO UNA SOLUZIONE INTERNA AD [A,B].

Questo teorema fornisce una giustificazione ai metodi iterativi per il calcolo degli zeri di una funzione. Questo teorema è un po' il duale della permanenza del segno: se in un intervallo il segno cambia e non c'è una discontinuità, ci deve per forza essere uno zero nel mezzo…

3.6.2. *Teorema di Weierstrass*

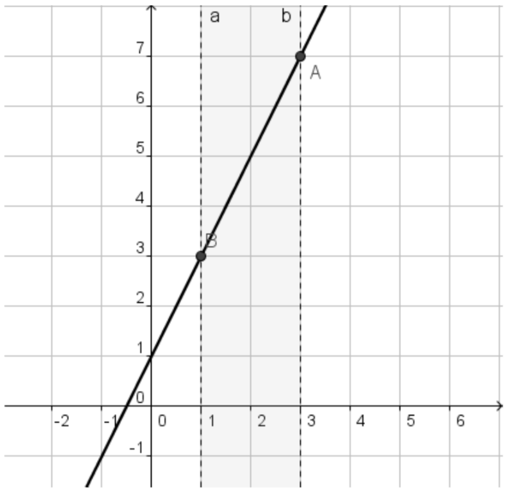
SE F(X) È UNA FUNZIONE CONTINUA IN UN INTERVALLO [A,B], ALLORA ASSUME IN [A,B] UN VALORE MINIMO E UN VALORE MASSIMO.

Anche se la funzione non ha un massimo o un minimo vero e proprio, all'interno di un intervallo limitato ci sarà comunque un valore massimo e un valore minimo.

Perfino una retta, in un intervallo limitato, ha un valore massimo e un valore minimo.

Nel grafico a lato si considera l'intervallo [1,2] e la retta $y = 2x + 1$

All'interno dell'intervallo il valore minimo è quello corrispondente al punto B (1,3) e il valore massimo è quello corrispondente al punto A (3,7).



4.LE DERIVATE

La derivata è il secondo strumento del calcolo analitico necessario per studiare una funzione.

4.1. Significato geometrico della derivata

La derivata, al apri del limite, è un operazione che viene fatta su di una funzione. A differenza del limite però non si ottiene un numero, ma un'altra funzione, diversa dalla prima.

La funzione originale si chiama **FUNZIONE PRIMITIVA**.

La funzione che si ottiene dopo avere derivato si chiama **FUNZIONE DERIVATA** e si indica con il simbolo $f'(x)$ oppure con il simbolo y' o ancora con $\frac{dy}{dx}$.

L'operazione inversa, cioè quella che dalla funzione derivata consente di trovare la primitiva si chiama integrazione.

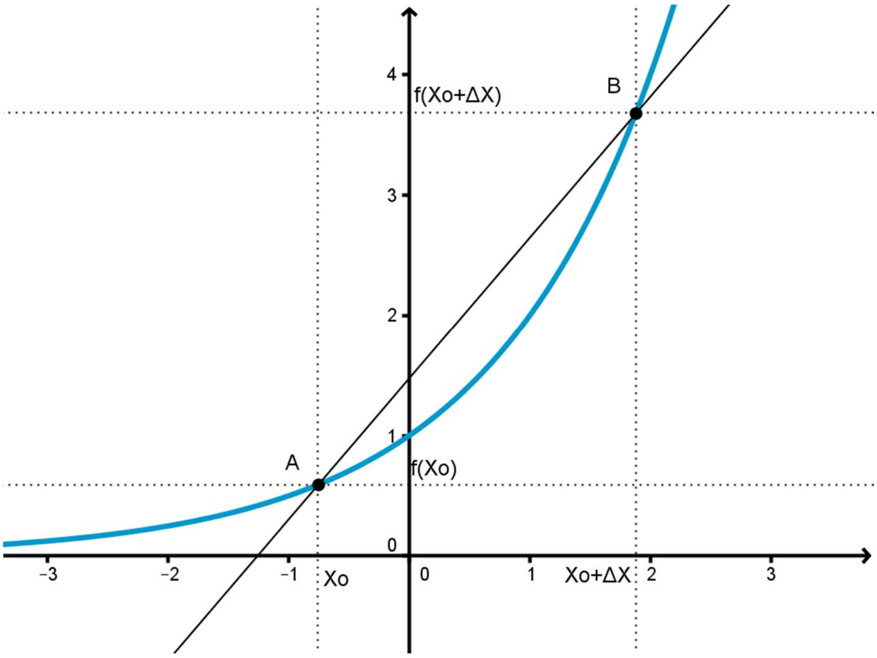
Analiticamente parlando, la derivata è definita attraverso il concetto di limite.

Consideriamo una funzione $y = f(x)$ e due punti del suo dominio A e B:

La coordinata x del secondo punto si può quindi ottenere dal primo sommando il termine Δx.

$$x_A = x_0$$

$$x_B = x_0 + \Delta x$$



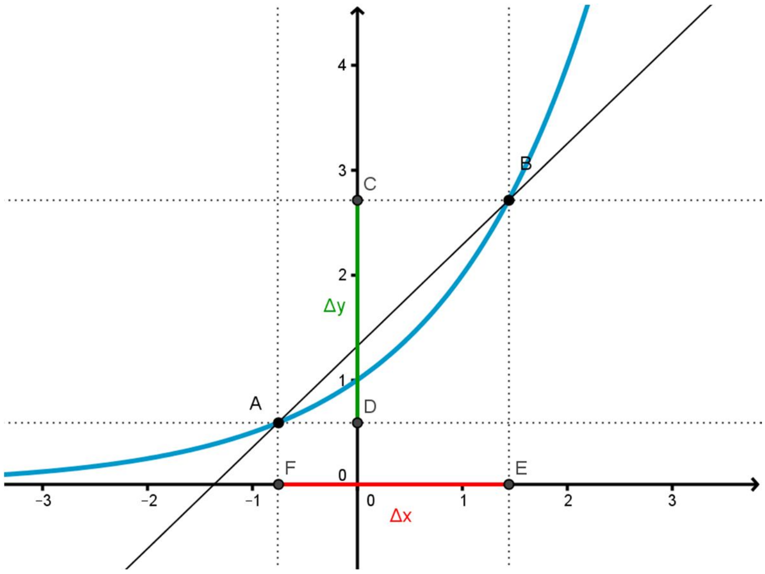
A questi due punti corrisponderanno le seguenti immagini:

$$f(x_A) = f(x_0)$$

$$f(x_B) = f(x_0 + \Delta x)$$

Si definisce rapporto incrementale la quantità:

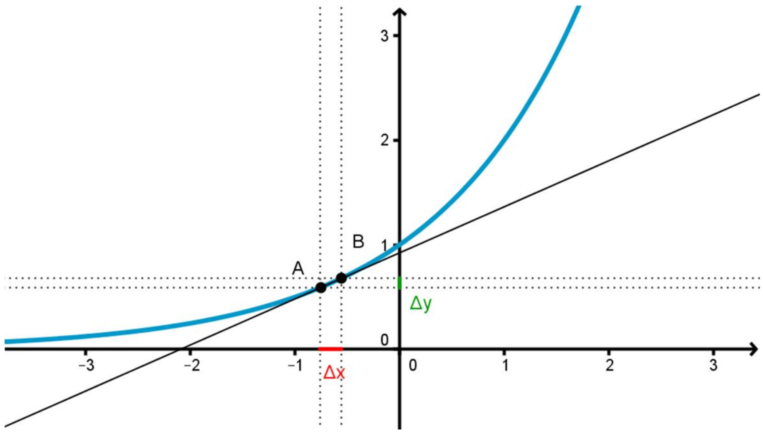
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



Il rapporto incrementale è in pratica il coefficiente angolare della retta che unisce i punti x_0 e $x_0 + \Delta x$.

A questo punto possiamo immaginare di ridurre sempre di più il Δx; in pratica è come se i due punti si avvicinassero l'uno all'altro.

Quando i due punti sono coincidenti la retta che il congiunge diventa la tangente alla funzione nel punto $A \equiv B$.



Qual è il coefficiente angolare della retta tangente? Non possiamo più utilizzare il rapporto incrementale per calcolarla perché siamo di fronte ad una forma indeterminata:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{0}$$

Infatti man mano che Δx diventa sempre più piccolo, anche il Δy diventa sempre più vicino a zero.

Per fortuna ci viene in aiuto il calcolo delle forme indeterminate dei limiti. In base alla funzione che ci troviamo di fronte (che sia algebrica o trascendente) c'è sicuramente un modo per risolvere il limite e arrivare ad un risultato.

Questo risultato è, per definizione, la derivata della funzione calcolata nel punto in cui la retta è tangente:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

Se questo limite esiste ed è finito, significa che la funzione $f(x)$ è derivabile nel punto x_0.

Poiché i limiti possono essere calcolati a destra e a sinistra del punto, anche la derivata può essere destra o sinistra.

$$f'(x_0^-)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0^+)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Quando il rapporto incrementale diventa così piccolo da non essere più definibile tramite il delta, si indica con il simbolo seguente:

$$\frac{dy}{dx}$$

che si legge de ipsilon su de ics. Scrivere la derivata in questo modo è la stessa cosa che scrivere $f'(x)$.

LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE, CALCOLATA IN UN PUNTO x_P, È IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA TANGENTE ALLA FUNZIONE PRIMITIVA NEL PUNTO DI ASCISSA x_P.

In altre parole, la funzione derivata $f'(x)$ rappresenta, per ogni x, il valore del coefficiente angolare della retta tangente alla funzione $f(x)$.

4.2. *Calcolo della funzione derivata*

Esistono delle regole pratiche per calcolare la funzione derivata. Se si tratta di una funzione elementare, il metodo consiste nell'individuare il tipo di funzione, ad esempio potenza, seno, logaritmo, e applicare la regola di calcolo:

FUNZIONE PRIMITIVA	REGOLA DI DERIVAZIONE	ESEMPIO
costante	$Dk=0$	$D[2]=0$
potenza	$Dx^N=\mathrm{N}\cdot x^{\mathrm{N}-1}$	$D[x^4]=4\cdot x^{4-1}=4x^3$
seno	$D\sin(x)=\cos(x)$	$D[\sin x]=\cos x$
coseno	$D\cos(x)=-\sin(x)$	$D[\cos x]=\sin x$
logaritmo	$D\ \log_a x=\frac{1}{x}\log_a e$	$D[\log_3 x]=\frac{1}{x}\log_3 e$
esponenziale	$Da^x=a^x\ln a$	$D[5^x]=5^x\ln 5$

Questa tabella consente di calcolare le funzioni elementari. Quando invece abbiamo a che fare con una funzione che risulta dalla somma/sottrazione, prodotto o divisione tra funzioni bisogna utilizzare le seguenti regole:

$$D[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x)$$
$$D[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$$
$$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$
$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Infine, si può presentare il caso in cui la funzione sia composta da più funzioni.

Una funzione si dice composta quando al posto della variabile x c'è un'altra funzione. Ad esempio:

$$y = \sin(2x)$$
$$y = (x+2)^2$$
$$y = \sqrt{x-5}$$

In pratica si tratta di vedere le funzioni come una matriosca, formata da una funzione più esterna che ne racchiude un'altra.

Ad esempio la funzione:

$$y = \sin[\ln(3x)]$$

ha come funzione più esterna il seno. All'interno del seno c'è il logaritmo e all'interno del logaritmo c'è la funzione $3x$.

La derivata delle funzioni composte si effettua con la seguente regola:

$$D\, f[g(x)] = f'\,[g(x)] \cdot g'(x)$$

Cioè si deriva la funzione più esterna, senza considerare le funzioni che ci sono all'interno e poi si moltiplica per la derivata della funzione più interna e così via per tutte le funzioni.

Ad esempio:

$$y = \sin[\ln(3x)]$$
$$y' = \cos[\ln(3x)] \cdot D[\ln(3x)] = \cos[\ln(3x)] \cdot \frac{1}{3x} \cdot D[3x] = \cos[\ln(3x)] \frac{1}{3x} 3$$

4.2.1. *Calcolo della derivata con la calcolatrice*

Le calcolatrici scientifiche consentono di calcolare la derivata di una funzione in un punto. Attenzione: non è possibile calcolare la funzione derivata, ma solo il valore che la funzione assume in un certo punto.

Per accedere alla funzione derivata è necessario premere il tasto

SHIFT

per attivare la seconda funzione e poi il tasto contrassegnato dal seguente simbolo:

$$\int_{[\ ]}^{[\ ]} [\ \ ]$$

La calcolatrice richiede come input la funzione primitiva e il punto in cui si vuole calcolare la derivata. La schermata si presenta in questo modo:

$$\frac{d}{dx} f(x)|_{x_0}$$

E' necessario scrivere la funzione primitiva $f(x)$, così come appare sul quaderno, e il valore x_0 del punto in cui si vuole calcolare la derivata.

4.3. *Significato analitico della derivata*

La funzione derivata presenta della importanti proprietà che sono utili sia per lo studio di funzione che per altre applicazioni:

- la derivata di un polinomio è di un grado più basso della primitiva;
- la derivata è positiva quando la primitiva è crescente e si annulla nei punti di massimo e minimo della primitiva;
- la derivata seconda è positiva quando la primitiva ha concavità positiva e si annulla nei punti di flesso della primitiva;
- la derivata è uguale, punto per punto, al coefficiente angolare della retta tangente alla primitiva.

4.3.1. *Abbassamento di grado*

Consideriamo un polinomio di 6° grado e calcoliamo la sua derivata:

$$y = x^6 + 2x^5 - 3x^4 + x^3 - x^2 + 2x + 1$$
$$y' = 6x^5 + 10x^4 - 12x^3 - 3x^2 - 2x + 2$$

Il polinomio derivata è di 5° grado e la costante è sparita.

Adesso deriviamo la derivata, cioè calcoliamo la derivata seconda:

$$y'' = 30x^4 + 40x^3 - 36x^2 - 6x - 2$$

La derivata seconda è di 4° grado.

Possiamo andare avanti a calcolare le derivate di ordine superiore fino ad ottenere zero:

$$y''' = 120x^3 + 120x^2 - 72x - 6$$
$$y^{IV} = 360x^2 + 240 - 72$$
$$y^{V} = 720x - 240$$
$$y^{VI} = 720$$
$$y^{VII} = 0$$

Ogni volta che deriviamo il grado del polinomio diminuisce di uno e la costante sparisce.

Questo ha importanti conseguenze. Infatti due funzioni diverse possono avere la stessa derivata:

$$y = 2x + 3 \qquad y' = 2$$
$$y = 2x + 1 \qquad y' = 2$$

Cioè pone qualche problema quando bisogna fare l'operazione opposta, cioè quando bisogna integrare per ritornare alla primitiva.

4.3.2. *Segno e zeri della derivata prima*

La derivata prima è a tutti gli effetti una funzione che può essere studiata La funzione derivata è a tutti gli effetti una funzione e come tale ha un suo grafico, un suo dominio e delle caratteristiche proprie.

Come tutte le funzioni, è possibile che la derivata stia in parte sopra l'asse x (cioè sia positiva) e in parte sotto l'asse x (cioè sia negativa).

E' inoltre possibile che abbia degli zeri, cioè dei punti in cui interseca l'asse delle x.

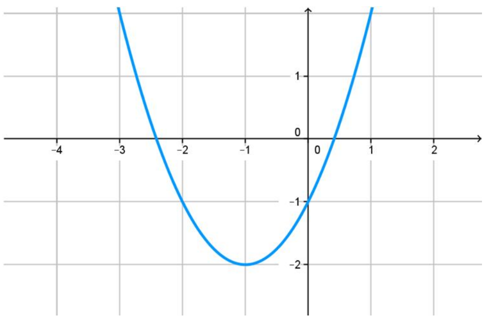
Questi punti sono molto importanti perché la loro coordinata x corrisponde alla coordinata x dei punti di massimo e minimo della primitiva.

Inoltre quando la derivata è positiva, la funzione primitiva è crescente e quando è negativa è decrescente.

Vediamo un esempio.

Consideriamo la funzione:

$$y = x^2 + 2x - 1$$



Si tratta di una parabola con concavità positiva, che ha quindi un punto di minimo.

Dal grafico si vede che si tratta del punto:

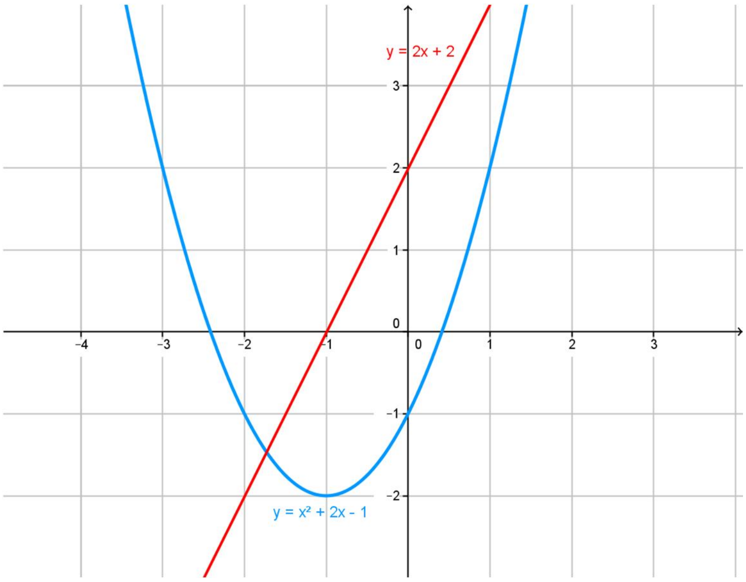
$$P_{min}(-1; -2)$$

Fino a tale punto la funzione è decrescente e da lì in poi comincia a crescere.

Adesso calcoliamone la derivata:

$$y' = 2x + 2$$

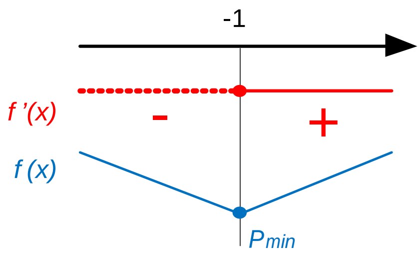
La derivata è una retta (abbiamo infatti visto che la derivata di un polinomio di 2° grado è un polinomio di 1° grado) e ha il grafico seguente:



Osservando il grafico vediamo che la derivata $\mathbf{y = 2x + 2}$ ha uno zero nel punto -1, proprio in corrispondenza del punto di minimo della primitiva $\boldsymbol{y = x^2 + 2x - 1}$.

Inoltre vediamo che fino al punto -1 la derivata è negativa e la primitiva sta decrescendo; dal punto -1 in poi la derivata è positiva e la primitiva sta crescendo.

Possiamo schematizzare quanto visto nel seguente modo:



Fino adesso abbiamo analizzato il grafico della derivata, ma se stiamo studiando una funzione non abbiamo il disegno a disposizione. Dobbiamo quindi fare uno studio analitico della derivata, dobbiamo cioè studiarne il segno ponendo:

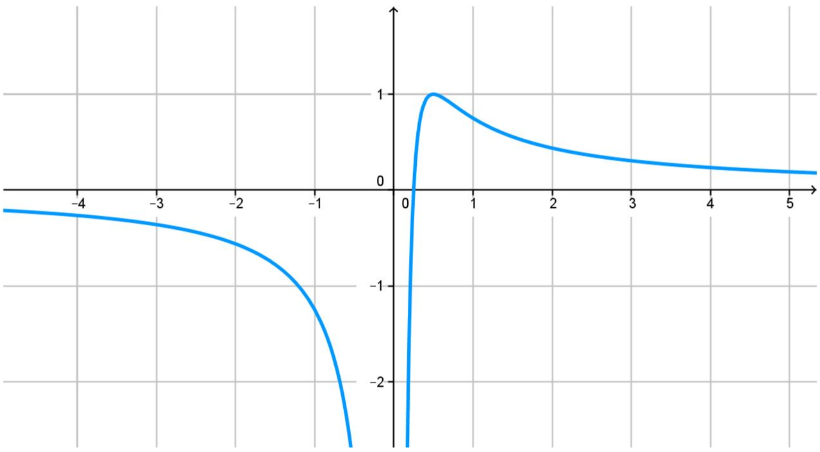
$$f'(x) \geq 0$$

E' necessario fare attenzione ad eventuali asintoti che, pur non essendo punti ne di massimo ne di minimo, fanno cambiare il segno della derivata. E' quindi opportuno riportare nello schema del segno della derivata anche il dominio della funzione primitiva.

<u>Esempio</u>

Calcoliamo i punti di massimo e di minimo della seguente funzione

$$y = \frac{x - \frac{1}{4}}{x^2}$$



Il dominio della funzione primitiva è: $(-\infty; 0) \quad V \quad (0; +\infty)$

La derivata della funzione è:

$$y' = \frac{D\left[x-\frac{1}{4}\right]\cdot x^2 - D[x^2]\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)}{(x^2)^2} = \frac{1\cdot x^2 - 2x\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)}{x^4} = \frac{-x^2+\frac{x}{2}}{x^4} = \frac{-2x+1}{2x^3}$$

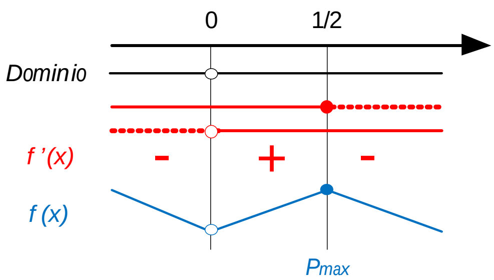
Ora studiamone il segno:

$$\frac{-2x+1}{2x^3} \geq 0$$

$$N \geq 0 \quad \rightarrow \quad -2x+1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \leq \frac{1}{2}$$

$$D > 0 \quad \rightarrow \quad 2x^3 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 0$$

Quindi:



Il punto $x = 0$ sembrerebbe un punto di minimo, ma è escluso dal dominio poiché lì c'è un asintoto verticale.

Possiamo però calcolare il punto di massimo di ascissa $x = \frac{1}{2}$. Per sapere quanto vale la y dobbiamo sostituire l'ascissa nella funzione primitiva. Infatti il punto di massimo è un punto di massimo della primitiva.

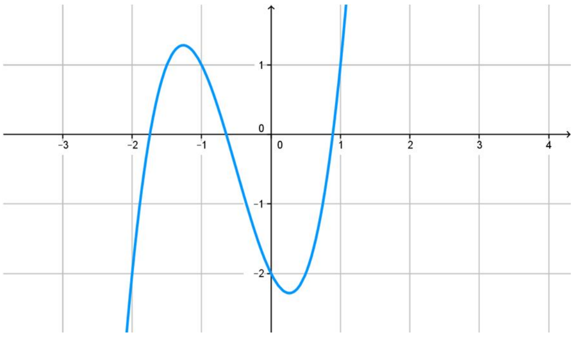
4.3.3. ***Segno e zeri della derivata seconda***

La derivata seconda ha anch'essa un significato molto importante. Quando la derivata seconda è positiva, la primitiva ha concavità positiva e viceversa. Il cambio di concavità comporta la presenza di un punto di flesso(quando non ci sono discontinuità) quindi gli seri della derivata seconda sono i flessi della primitiva.

Vediamo un esempio.

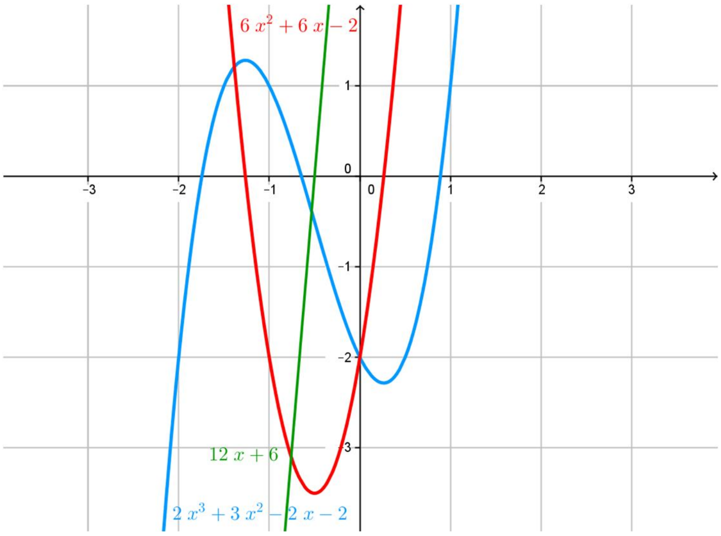
Consideriamo la funzione seguente:

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$



Come possiamo vedere dal grafico, la funzione ha un punto di massimo e un punto di minimo e presenta un flesso. Infatti la curva nel primo tratto ha concavità negativa (è rivolta all'ingiù) e nel secondo tratto ha concavità positiva (è rivolta all'insù). Dal grafico s vede che il punto di flesso ha coordinate $P_F\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Il grafico seguente mostra, oltre alla funzione primitiva $\boldsymbol{y = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 2}$ la derivata prima $\boldsymbol{y = 6x^2 + 6x - 2}$ e la derivata seconda $\boldsymbol{y = 12x + 6}$



Come possiamo vedere, la derivata seconda è negativa fino al punto $x = -\frac{1}{2}$ e diventa positiva da quel punto in poi.

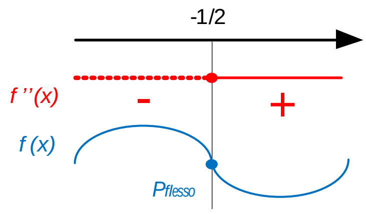
Se non abbiamo a disposizione il grafico, dobbiamo analizzare il segno della derivata seconda in maniera analitica. Dobbiamo cioè risolvere la disequazione:

$$f''(x) \geq 0$$

Nell'esempio precedente:

$$y'' = 12x + 6$$

$$12x + 6 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq -\frac{1}{2}$$



Anche in questo caso è opportuno riportare il dominio della primitiva per evitare di scambiare delle discontinuità per punti di flesso.

4.3.4. *Tangente alla primitiva in un punto*

Uno dei problemi che si presenta più spesso in matematica è quello di calcolare la tangente ad una funzione in un punto. Per far ciò possiamo usare la derivata. Infatti abbiamo visto che la derivata è una funzione che stabilisce, per ogni x, il valore del coefficiente angolare della retta tangente alla primitiva.

Se vogliamo calcolare la retta tangente in $P(x_P; y_P)$ alla funzione $f(x)$, dobbiamo trovare il coefficiente angolare m_P e l'intercetta all'origine q_P. In questo modo la retta sarà nota:

$$y = m_P x + q_P$$

Per il calcolo del coefficiente angolare ci basta conoscere la derivata e calcolarla nel punto P:

$$m_P = f'(x_P)$$

Per trovare il coefficiente angolare dobbiamo imporre che il punto P appartenga alla funzione, cioè che le sue coordinate, sostituite nell'espressione della retta, diano un'identità:

$$y_P = m_P \cdot x_P + q_P$$

Dove l'unica incognita è il termine q_P.

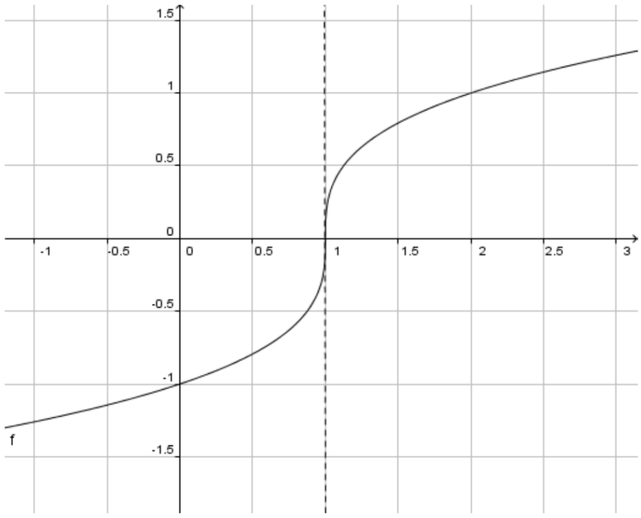
4.4. *I punti di non derivabilità*

I punti che sono esclusi dal dominio di una funzione derivata si chiamano punti di non derivabilità.

Vediamo ora tre casi in cui la funzione non è derivabile in un punto.

4.4.1. *Punto di flesso a tangente verticale*

La definizione di derivata implica che quando il limite del rapporto incrementale esiste, ma è infinito, la funzione non è derivabile in quel punto. Infatti in quel caso significa che il coefficiente angolare della retta tangente è $m = \infty$.



Quindi, quando la derivata è infinita significa che siamo di fronte ad una retta verticale.

Se osserviamo il grafico precedente possiamo notare che un punto in cui la tangente è verticale corrisponde sempre ad un punto di flesso, cioè ad un punto in cui la funzione passa dall'essere concava verso l'alto (come una tazza), all'essere concava verso il basso (come un tazza rovesciata).

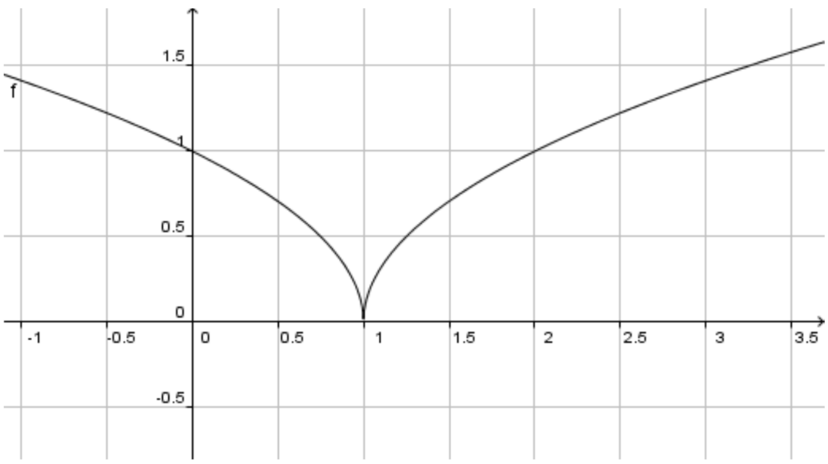
Un punto di una funzione in cui la derivata risulta infinita è chiamato flesso a tangente verticale.

Un punto di flesso a tangente a tangente verticale è caratterizzato dal fatto che la derivata non esiste e quindi per calcolarla è necessario usare il limite:

$$\lim_{x \to c^+} f'(x) = \lim_{x \to c^-} f'(x) = \pm\infty$$

4.4.2. ***Cuspide***

Se la derivata destra e la destra sinistra entrambe infinite ma di segno opposto, si ha il caso rappresentato nella figura della pagina seguente.



Nel punto $x = 1$ la funzione non è derivabile perché il limite del rapporto incrementale da un valore infinito. Se ci avviciniamo al punto di non derivabilità da destra e da sinistra otteniamo due infiniti di segno opposto:

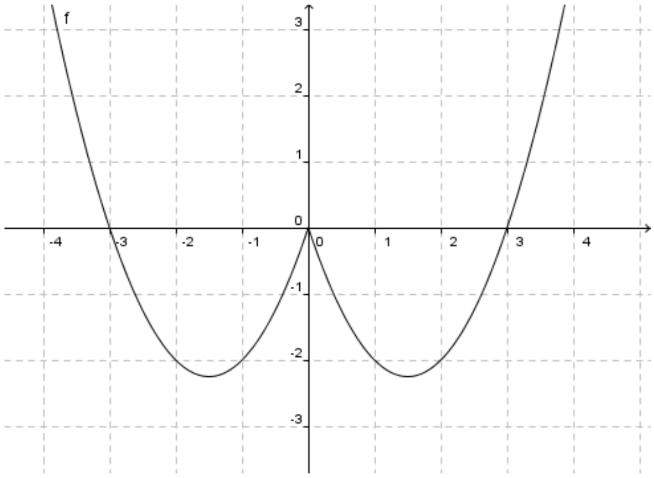
$$\lim_{x \to c^+} f'(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to c^-} f'(x) = \mp\infty$$

Il punto $x = 1$ prende il nome di cuspide.

4.4.3. ***Punto angoloso***

Un punto angoloso è un punto in cui le derivate destra e sinistra esistono e sono finite, ma sono diverse tra loro, come nel grafico seguente:



Il punto angoloso è un particolare punto con due tangenti: una da destra e una da sinistra. Entrambe le funzioni hanno valore finito, ma diverso l'una dall'altra poiché i coefficienti angolari sono opposti:

$$\lim_{x\to c^+} f'(x) = m$$

$$\lim_{x\to c^-} f'(x) = -m$$

4.5. ***Teoremi sulle funzioni derivabili***

Ora vediamo 3 teoremi sulle funzioni derivabili:

- Teorema di Rolle
- Teorema di Lagrange o del valor medio
- Teorema di De'Hopital

4.5.1. ***Teorema di Rolle***

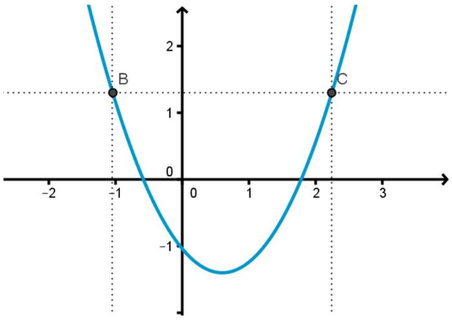
DATA UNA FUNZIONE $f(x)$ CHE SIA:

CONTINUA IN UN INTERVALLO CHIUSO $[a, b]$

DERIVABILE IN UN INTERVALLO APERTO (a, b)

CON $f(a) = f(b)$

ALLORA ESISTE UN PUNTO $c \in (a, b)$ NEL QUALE RISULTA $f'(c) = 0$



In pratica se una funzione ha due punti in cui assume lo stesso valore, in mezzo, qualche parte, ci deve essere un massimo o un minimo ($f'(c) = 0$).

Se così non fosse la funzione sarebbe monotona (o cresce sempre o decresce sempre) e quindi non potrebbe tornare ad assumere lo stesso valore.

Al limite, potremmo avere una retta parallela all'asse x (orizzontale). In questo caso, comunque, la derivata prima è nulla in tutti i punti.

4.5.2. *Teorema di Lagrange o del valor medio*

DATA UNA FUNZIONE $f(x)$ CHE SIA:

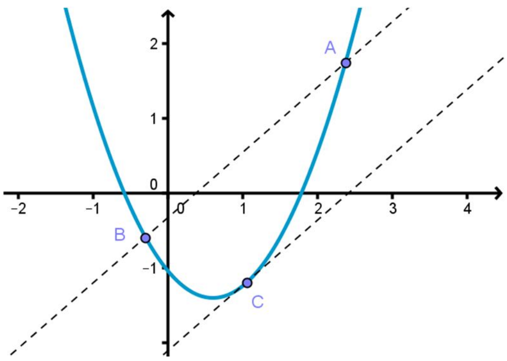
CONTINUA IN UN INTERVALLO CHIUSO $[a, b]$

DERIVABILE IN UN INTERVALLO APERTO (a, b)

ALLORA ESISTE UN PUNTO $c \in (a, b)$, DETTO PUNTO DI LAGRANGE, NEL QUALE RISULTA:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Ovvero, esiste un punto $\boldsymbol{c} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ nel quale la retta tangente risulta parallela alla retta che unisce i due estremi dell'intervallo.



La retta che passa per il punto c è parallela alla retta che unisce A e B.

Le due rette hanno quindi lo stesso coefficiente angolare.

Il coefficiente angolare della retta passante per c si ottiene calcolando al derivata prima della $f(x)$ nel punto c.

Questo valore è uguale a quello che si trova calcolando il coefficiente angolare della retta che passa per A e B con i metodi della geometria analitica:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

4.5.3. *Teorema di De L'Hopital*

DATE DUE FUNZIONI $g(x)$ E $f(x)$ DEFINITE IN UN INTORNO I DI UN PUNTO x_0, FINITO O INFINITO, E CHE SIANO:

CONTINUE E DERIVABILI NEL PUNTI DI $I - \{x_0\}$

CON

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

$$g'(x) \neq 0 \; in \; I - \{x_0\}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

ALLORA:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

Questo teorema consente di risolvere molte delle forme indeterminate dei limiti.

5.GLI INTEGRALI

Come abbiamo visto, l'integrale è l'inverso della derivata.

Anche l'integrale, come la derivata, ha una definizione analitica e una geometrica.

5.1. *Definizione analitica dell'integrale*

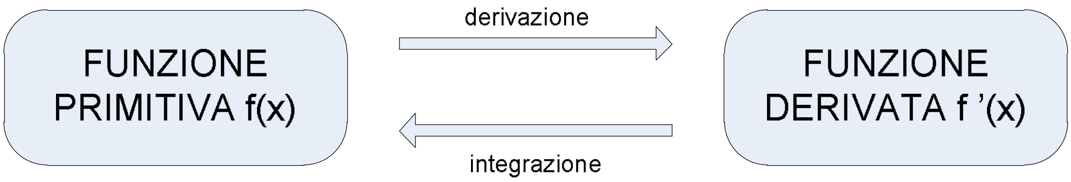
Per comprendere cosa sia l'integrale, consideriamo una funzione semplice:

$$\boldsymbol{y = 3x^2 - 4x + 5}$$

e calcoliamone la derivata:

$$y' = 6x - 4$$

Il processo inverso parte dalla derivata per calcolare la funzione di partenza, chiamata funzione primitiva.



Quindi, se abbiamo una funzione:

$$f'(x)$$

l'operazione che ci consenta di risalire alla primitiva prende il nome di integrazione e si indica con il simbolo seguente:

$$f(x) = \int f'(x)\, dx$$

Per capire il concetto di integrale è necessario considerare il significato geometrico della derivata.

Abbiamo visto che la derivata è il limite del rapporto incrementale:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Quando il Δx è molto piccolo (tende a 0).

Per indicare che si tratta di una quantità molto piccola, anziché usare il simbolo Δ si usa la lettera d e il rapporto incrementale diventa:

$$\frac{dy}{dx}$$

che si legge "de ipsilon su de ics".

Quindi, sapendo che questo equivale alla derivata:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Che si può scrivere come:

$$f'(x)dx = dy$$

Passando tutto sotto il segno d'integrale:

$$\int dy = \int f'(x)dx$$

Cioè:

$$y = \int f'(x)dx$$

5.1.1. *La costante di integrazione*

Consideriamo le seguenti funzioni che differiscono tra loro solo per una costante:

$$f(x) = x^2 + 3x + 5$$
$$h(x) = x^2 + 3x + 1$$
$$g(x) = x^2 + 3x$$

Le loro derivate sono:

$$f'(x) = 2x + 3$$
$$h'(x) = 2x + 3$$
$$g'(x) = 2x + 3$$

Come possiamo notare, le loro derivate sono tutte uguali. Questo succede perché la derivata di una costante è nulla.

Quindi quando si cerca la primitiva di una funzione, si trovano infiniti risultati, ognuno differente dall'altro per una costante. Quindi quando si scrivere il risultato di un integrale si deve sempre sommare la costante c.

5.2. *Calcolo dell'integrale*

Come per le derivate, le funzioni elementari hanno delle primitive note che devono essere imparate a memoria.

Di seguito sono riportate queste primitive:

$$\int 0\, dx = k$$

$$\int 1\, dx = x + c$$

$$\int [f(x)]^N \cdot f'(x)dx = \frac{f(x)^{N+1}}{N+1} + c$$

$$\int \frac{1}{f(x)} f'(x)dx = \ln|x| + c$$

$$\int \sin[f(x)] \cdot f'(x)\, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos[f(x)] \cdot f'(x)\, dx = \sin x + c$$

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{f(x)^2 + k^2} f'(x) dx = \frac{1}{k} \arctan[kf(x)] + c$$

Questi vengono chiamati integrali fondamentali perché sono quelli che bisogna sapere a memoria per poter risolvere quelli più complessi.

Per poter calcolare gli integrali più complicati è necessario tenere conto delle seguenti regole:

$$\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x)\, dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]^2 dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

A volte però queste regole non bastano. E' il caso in cui ci si trova di fronte a funzioni moltiplicate o divise. In questi casi è necessario ricorrere ad altri metodi.

5.3. *Metodi d'integrazione*

Quando si risolve un integrale, la prima cosa da fare è domandarsi se si tratta della somma, del prodotto o del rapporto di due funzioni.

- Se si tratta della somma si utilizza la regola d'integrazione che abbiamo visto nel paragrafo precedente
- Se si tratta del prodotto si utilizza una regola d'integrazione chiamata per parti
- Se si tratta della divisione si utilizzano le regole per le funzioni fratte.

5.3.1. *Integrazione per parti*

Si utilizza quando all'interno di un integrale ci sono due funzioni moltiplicate tra loro.

La formula di risoluzione è la seguente:

$$\int f(x) \cdot g(x) dx = F(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

dove:

$F(x)$ è una primitiva della funzione $f(x)$.

In pratica, nella formula per parti, una delle due funzioni viene integrata e una viene derivata.

Questo metodo ha un senso solo se la funzione derivata $g'(x)$ è più semplice della $g(x)$.

Il trucco per usare la formula per parti sta nell'individuare quale delle due funzioni all'interno dell'integrale deve essere derivata: si sceglie la funzione che, una volta derivata, semplifica l'integrale.

Poiché esistono solo due possibili combinazioni, si può anche andare per tentativi.

Esempio:

$$\int x \cdot e^x dx$$

Le due funzioni sono la x e l'esponenziale.

Calcoliamo la derivata e l'integrale di entrambe:

$$D[x] = 1 \qquad \int x dx = \frac{x^2}{2}$$

$$D[e^x] = e^x \qquad \int e^x dx = e^x$$

Risulta evidente che la funzione che risulta più semplice una volta derivata è la x.

Quindi scegliamo:

$$f(x) = e^x$$

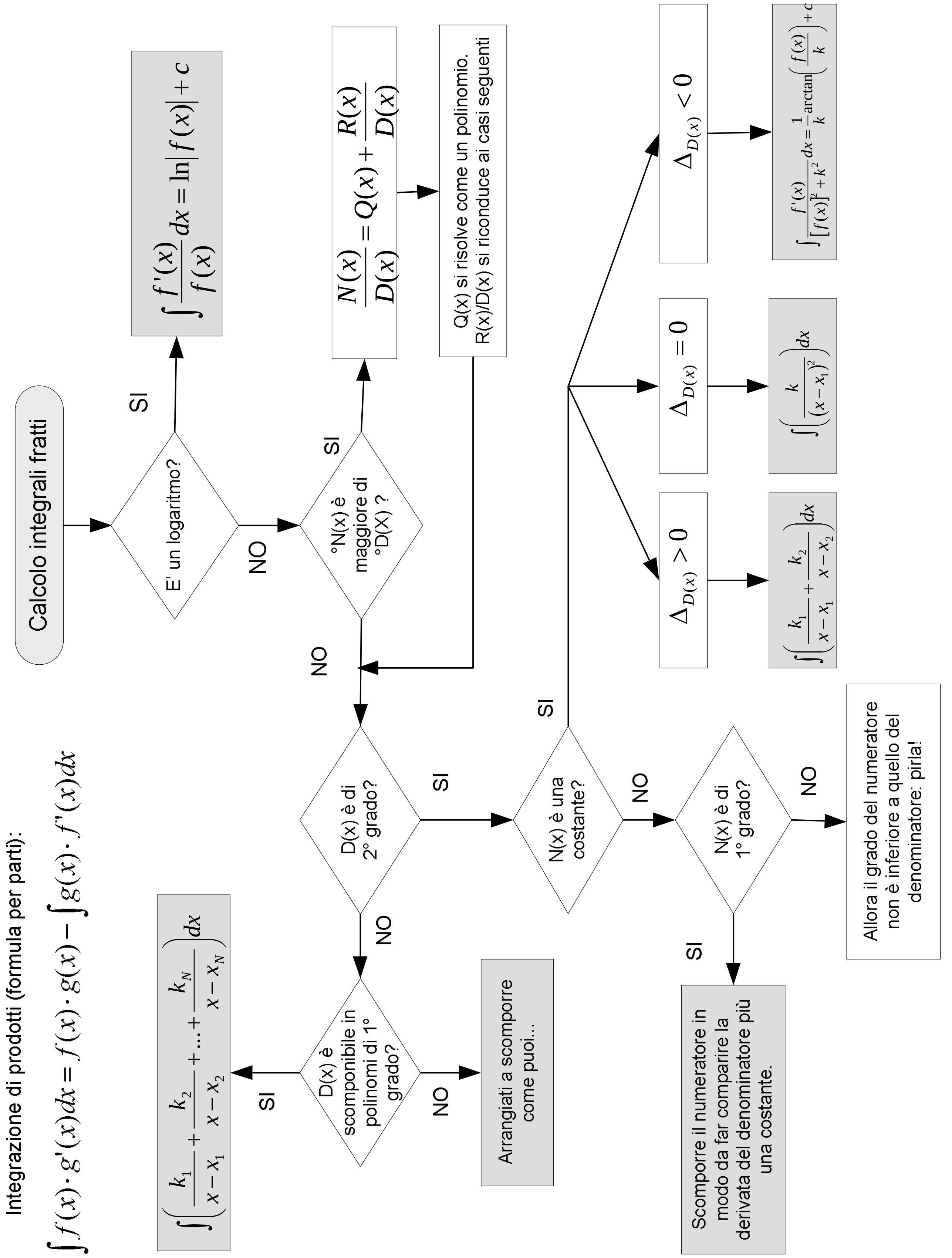
$$g(x) = x$$

E applichiamo la formula:

$$\int e^x \cdot x dx = \frac{x^2}{2} \cdot x - \int e^x \cdot 1 dx = \frac{x^3}{2} - e^x + c$$

5.3.2. ***Integrazione delle funzioni fratte***

Per integrare le funzioni fratte si può utilizzare lo schema seguente:



5.4. *L'integrale definito*

Un integrale si dice definito se è calcolato tra due valori della variabile x.

I due valori vengono scritti agli estremi superiore e inferiore del segno di integrale:

$$F(x) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Per calcolare un integrale definito, si calcola prima l'integrale indefinito e si scrive la funzione ottenuta tra due parentesi quadre. Quindi si sostituisce alla x il valore che compare nell'estremo superiore del segno di integrale (cioè x_2) e quello che compare all'estremo inferiore (cioè x_1).

In questo modo si ottengono due valori che sono $F(x_2)$ e $F(x_1)$.

Il risultato dell'integrale definito è la differenza tra questi due valori:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$$

Esempio: calcolare l'integrale $\int_{-1}^{4}(x^2 + 3x + 2)\,dx$

$$\int_{-1}^{4}(x^2 + 3x + 2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 2x + c\right]_{-1}^{4} =$$

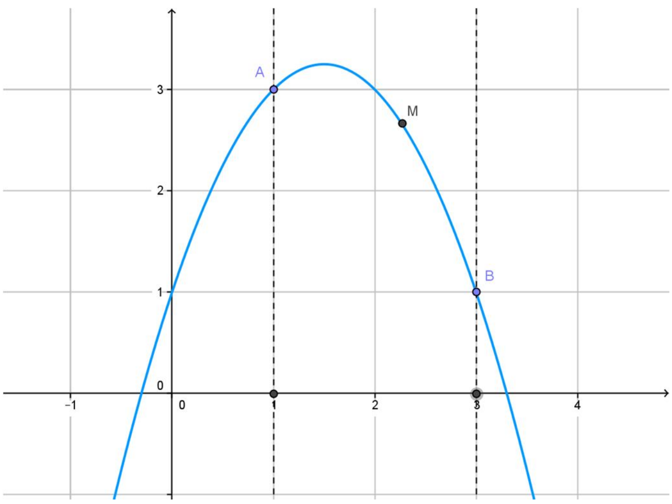
$$\left[\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 2x + c\right]_{-1}^{4} = \frac{4^3}{3} + 3\frac{4^2}{2} + 2\cdot 4 + c - \left(\frac{(-1)^3}{3} + 3\frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) + c\right) =$$

$$= \frac{64}{5} + 3\frac{16}{2} + 8 + c + \frac{1}{3} - 3\frac{1}{2} + 2 - c = 45{,}6$$

5.4.1. *Calcolo del punto medio di un arco*

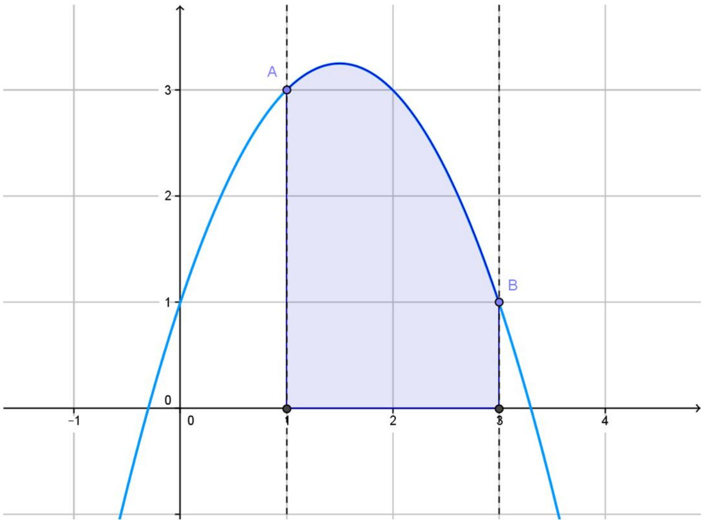
Data una funzione $f(x)$ e un intervallo (a,b) è possibile calcolare la coordinata y del punto medio $M(x_M; y_M)$ con un integrale definito:

$$y_M = f(x_M) = \frac{1}{x_B - x_A}\int_{x_A}^{x_B} f(x)\,dx$$



5.4.2. *Calcolo dell'area sottesa ad una curva*

Data una funzione $f(x)$ nel piano cartesiano, è possibile utilizzare l'integrale definito per calcolare l'area di piano sottesa alla curva, compresa tra due estremi. Quando si parla di area sottesa s'intende l'area compresa tra la curva, all'asse delle x e i due estremi dell'intervallo (a, b).



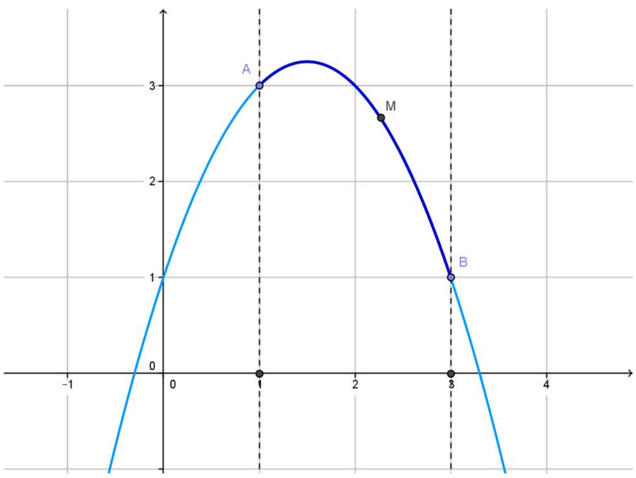
La formula da utilizzare è la seguente:

$$Area = \int_{x_A}^{x_B} f(x)dx$$

L'area colorata si trova calcolando l'integrale fella funzione tra 3 e 6:

5.4.3. *Calcolo della lunghezza di un arco di curva piana*

Con l'integrale definito è anche possibile calcolare la lunghezza di un arco di curva. Ad esempio possiamo calcolare la lunghezza dell'arco CD.



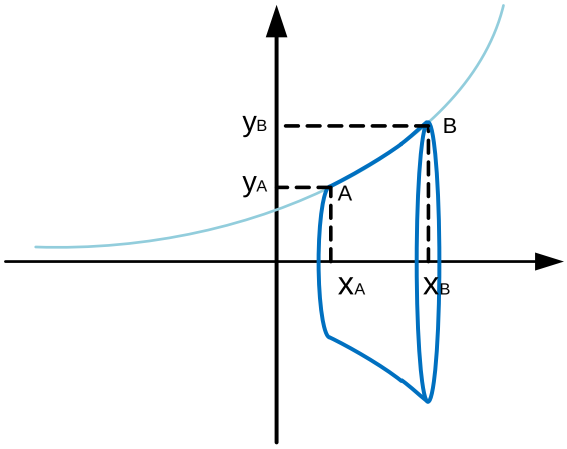
La formula per il calcolo è la seguente:

$$Arco = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

5.4.4. *Calcolo del volume di un solido di rotazione attorno all'asse x*

Infine con l'integrale definito è possibile calcolare il volume di solidi di rotazione ottenuti facendo ruotare un segmento di curva attorno all'asse x.

E' necessario conoscere la funzione $f(x)$ che deve ruotare e gli estremi dell'intervallo (a, b).



La formula per il calcolo del volume è:

$$Volume = \pi \int_{x_A}^{x_B} [f(x)]^2 \, dx$$

5.4.5. *Calcolo del volume di un solido di rotazione attorno all'asse y*

Qual'ora la rotazione avvenga attorno all'asse y, è possibile utilizzare la stessa formula per il calcolo del volume, ma è necessario invertire la funzione e calcolare l'integrale in dy.

Prima di tutto si inverte la funzione:

$$y = f(x) \quad \rightarrow \quad x = f(y)$$

Quindi si calcolano gli estremi nell'intervallo:

$$(x_A;\ x_B) \quad \rightarrow \quad (y_A;\ y_B)$$

Per il calcolo basta ricordare che:

$$y_A = f(x_A)$$

Quindi la formula da usare è:

$$Volume = \pi \int_{y_A}^{y_B} [f(y)]^2 \, dy$$

Riassumendo:

L'integrale definito si usa per quattro cose:

- Calcolo della media integrale: $y_M = f(x_M) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$
- Calcolo dell'area sottesa ad una curva: $Area = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$
- Calcolo della lunghezza di un arco di curva: $Arco = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$
- Calcolo del volume di un solido di rotazione: $Volume = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2\,dx$

6. IL CALCOLO COMBINATORIO

Il calcolo combinatorio si occupa di studiare i possibili insiemi che si possono ottenere avendo a disposizione n elementi e prendendone un certo numero k:

- n = numero degli elementi dell'insieme di partenza, che contiene tutti gli elementi che si hanno a disposizione
- k = numero degli elementi che si estraggono dall'insieme n.

6.1. *Definizioni*

- **INSIEME ORDINATO**: un insieme si dice ordinato quando "l'ordine" degli oggetti è importante. Ad esempio, i due insiemi:

$$A = \{1,2,3\}$$
$$B = \{2,1,3\}$$

  sono diversi, anche se contengono gli stessi oggetti.
- **INSIEME NON ORDINATO**: un insieme non ordinato di oggetti contiene degli elementi di cui l'ordine non è importante. Ad esempio, la "combinazione vincente" del superenalotto è un insieme di numeri di cui non è importante l'ordine: la cinquina {3; 6; 32; 56; 82} è la stessa di {6; 82; 3; 56; 32} Ad esempio, nel gioco del superenalotto, l'insieme di partenza è costituito dai numero compresi tra 1 e 90 e quindi n = 90. L'insieme degli elementi estratti è costituito da k = 5 elementi.

Il calcolo combinatorio si occupa di trovare tre possibili raggruppamenti chiamati:

- **DISPOSIZIONI**: una disposizione è un gruppo ordinato di k elementi estratti da un insieme di n elementi. Si indicano con:

$$D_{n,k}$$

- **COMBINAZIONI**: una combinazione è un gruppo non ordinato di k elementi estratti da un insieme di n elementi. Si indicano con:

$$C_{n,k}$$

- **PERMUTAZIONI**: un permutazione è un gruppo ordinato di k elementi estratti da un insieme di n = k elementi. In pratica la permutazione è una disposizione particolare in cui k = n. Si indicano con:

$$P_n$$

Le disposizioni e le combinazioni possono essere:

- **SEMPLICI**: se gli elementi che compongono k sono tutti diversi e non possono essere ripetuti.
- **CON RIPETIZIONE**: se alcuni elementi di k sono ripetuti più volte.

Le disposizioni e le combinazioni con ripetizione si indicano con:

$$D'_{n,k} \qquad C'_{n,k}$$

6.2. *Calcolo combinatorio semplice*

DISPOSIZIONI SEMPLICI

Il numero delle disposizioni semplici di n oggetti di classe k è da dato da:

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Sulla calcolatrice questo calcolo viene eseguito automaticamente dalla funzione nPr che fornisce il numero di disposizioni di n oggetti presi r volte senza ripetizione.

PERMUTAZIONI SEMPLICI

Il numero delle possibili permutazioni di n oggetti è dato da:

$$P_n = n!$$

Dove $n!$ si chiama "n fattoriale" e da il prodotto di tutti i numero compresi tra 1 e n. Ad esempio:

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

COMBINAZIONI SEMPLICI

Il numero delle combinazioni semplici di n oggetti di classe k è dato da:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Dove il simbolo $\binom{n}{k}$ si chiama **BINOMIO DI NEWTON**.

Sulla calcolatrice questo calcolo viene eseguito automaticamente dalla funzione nCr che fornisce il numero di combinazioni di n oggetti presi r volte senza ripetizione.

6.3. *Calcolo combinatorio con ripetizione*

DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE

Nelle disposizioni con ripetizione ogni oggetto può comparire più volte; potrebbe anche essere l'unico oggetto di un dato raggruppamento. Ad esempio, le disposizione con ripetizione degli oggetti dell'insieme A = {1,2,3} sono:

11 22 33 12 13 21 23 31 32

Il numero delle disposizioni con ripetizione di n oggetti di classe k è dato da:

$$D'_{n,k} = n^k$$

PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE

Nelle permutazioni è necessario capire quante volte un oggetto può essere ripetuto. Il numero delle permutazioni in n oggetti che possono essere ripetuti rispettivamente un numero di volte pari ad a,b,c, ecc... è data da:

$$P'_n = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c! \cdot \ldots}$$

COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

Le possibili combinazioni di n oggetti di classe k, anche ripetuti, sono date da:

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$$

IL BINOMIO DI NEWTON

Il binomio di Newton si calcola in questo modo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

7.Sommario