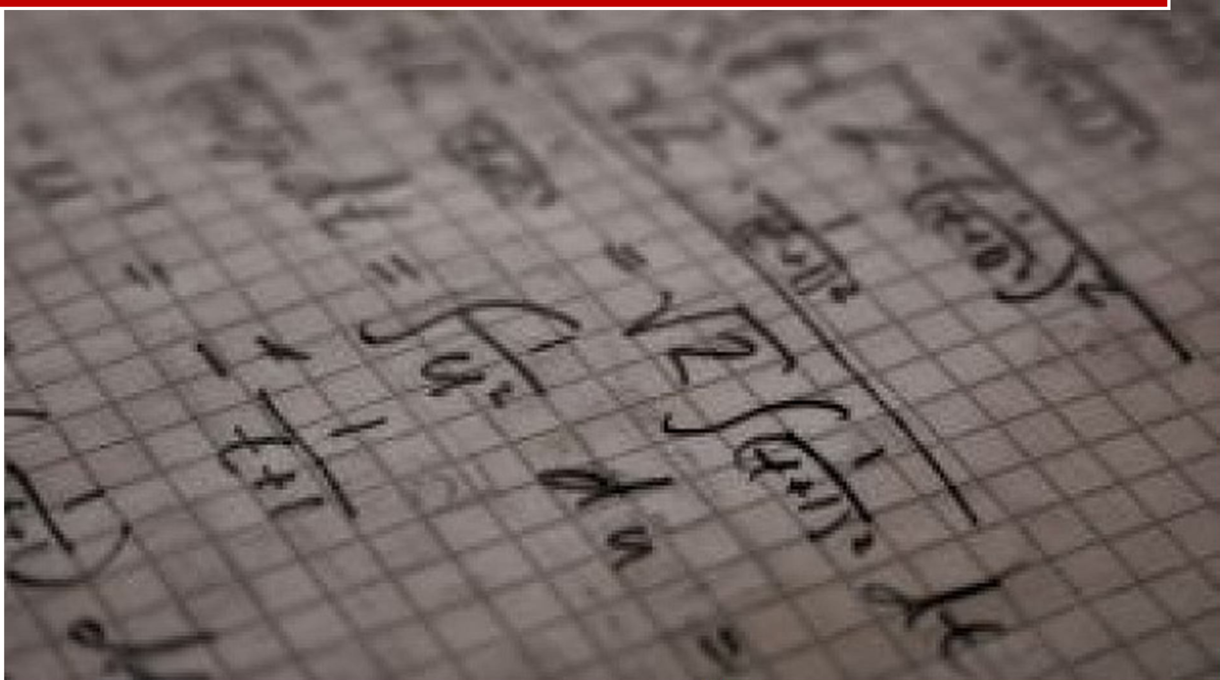
TECLA

SPELGATTI

TEORIA MATEMATICA

per la classe 4°



1.FONDAMENTI DI TRIGONOMETRIA

La trigonometria ha a che fare con gli angoli e con la loro misurazione.

Per misurare gli angoli si possono utilizzare 3 unità di misura:

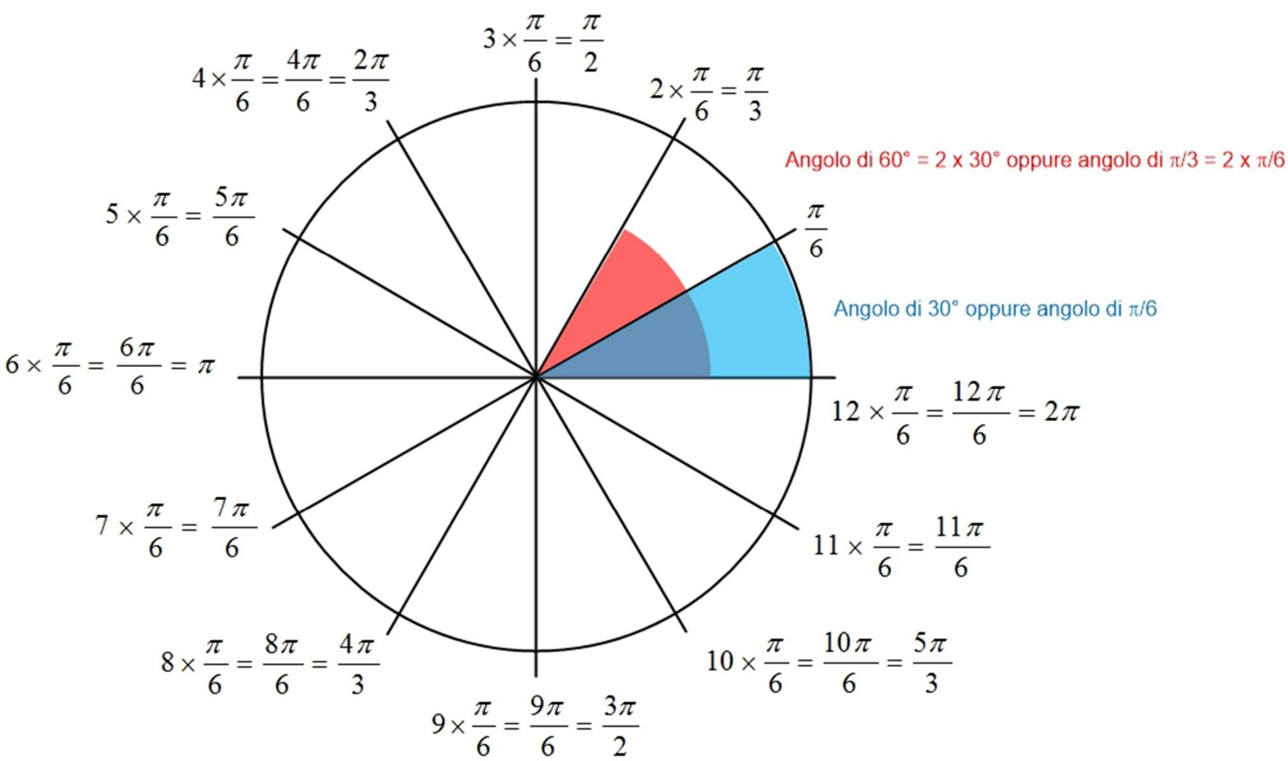
- **GRADI SESSAGESIMALI**: quelli che siamo abituati ad usare normalmente. I gradi sessagesimali sono definiti come la trecento-sessantesima parte di un angolo giro; quindi un angolo retto vale 90°
- **GRADI CENTESIMALI**: un grado centesimale è la quattrocentesima parte di un angolo giro; quindi un angolo retto vale 100 gradi centesimali.
- **RADIANTI**: un radiante è definito come l'angolo al centro di una circonferenza, sotteso ad un arco di lunghezza pari a quella del raggio della circonferenza.

1.1. *Conversione da gradi a radianti*

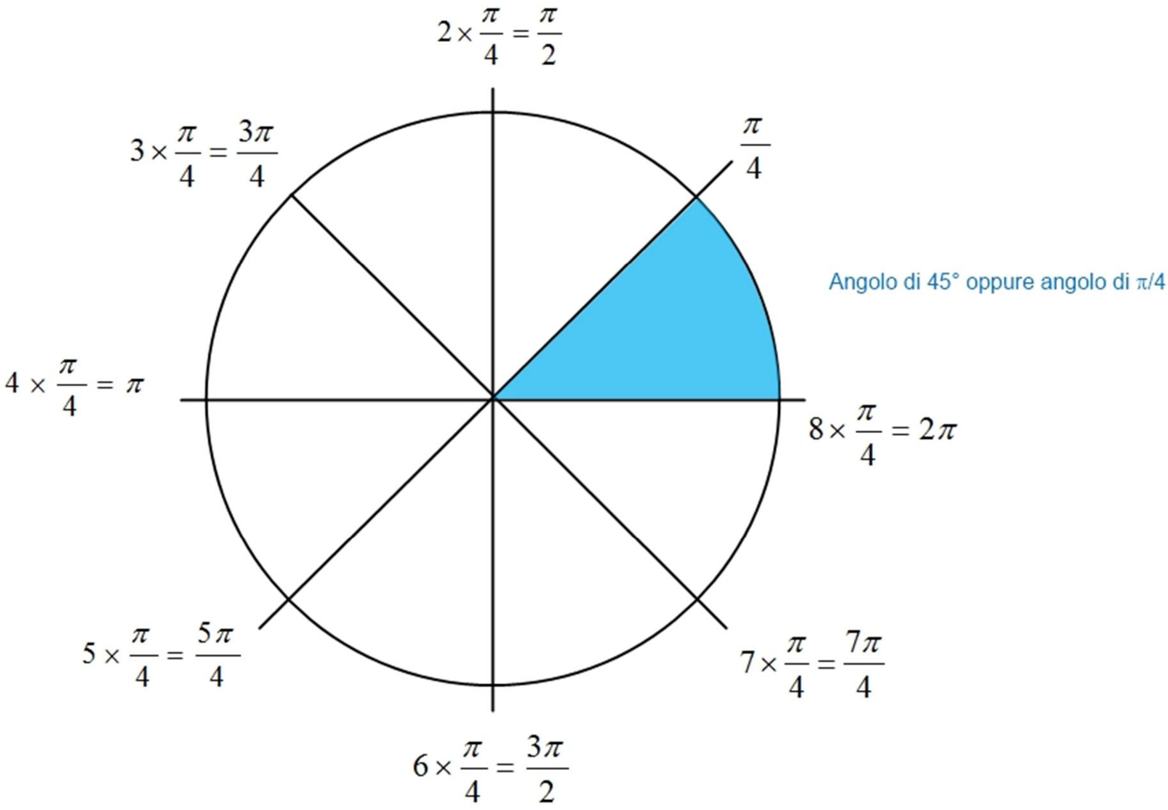
I gradi sessagesimali sono facili da usare perché li usiamo tutti i giorni. Ragionare in radianti invece è più difficile. Per capire come passare da gradi a radianti consideriamo una circonferenza con indicati gli angoli multipli di 30°.

L'angolo di 30° corrisponde ad un angolo di $\frac{\pi}{6}$ radianti. Partendo da questo valore possiamo ricavare tutti gli angoli multipli di 30°. Ad esempio, l'angolo di 60° è il doppio di quello di 30°; in radianti:

$$2 \times 30° = 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \; radianti$$



Lo stesso ragionamento si può fare l'angolo di 45°, che in radianti vale $\frac{\pi}{4}$:



Se invece si vuole convertire da gradi a radianti un angolo qualunque, come 12.7°, si può utilizzare una proporzione.

Basta ricordare che un angolo piatto (180°) vale π e impostare la proporzione:

$$\alpha_{gradi} : \alpha_{radianti} = 180 : \pi$$

Ad esempio, si vuole convertire in radianti l'angolo $\alpha = 25°$

$$25 : \alpha_{radianti} = 180 : \pi$$

$$\frac{25}{\alpha_{radianti}} = \frac{180}{\pi} \quad \rightarrow \quad \alpha_{radianti} = \frac{25\pi}{180}$$

In questo modo possiamo calcolare il valore in gradi di un radiante:

$$\alpha_{gradi} = \frac{180}{\pi}\alpha_{radianti} = \frac{180}{\pi} \cong 57{,}32$$

Bisogna fare attenzione all'unità di misura degli angoli quando si usa una calcolatrice.

Le calcolatrici scientifiche possono essere impostate per operare in uno dei tre tipi di angoli che abbiamo visto.

- La modalità di calcolo in gradi sessagesimali è indicata con la sigla DEG.
- La modalità di calcolo in gradi centesimali è indicata con la sigla GRAD
- La modalità di calcolo in radianti è indicata con la sigla RAD.

Per passare da una modalità all'altra ogni calcolatrice richiede una procedura particolare descritta nel manuale d'istruzioni. Di solito però è necessario entrare nel menù setup.

Sul monitor della calcolatrice appare la sigla RAD, GRAD o DEG (su alcuni modelli anche solo l'iniziale R, D,G)

1.2. *Il seno, il coseno e la tangente*

Per studiare la trigonometria si utilizza una circonferenza di raggio 1, centrata nell'origine degli assi.

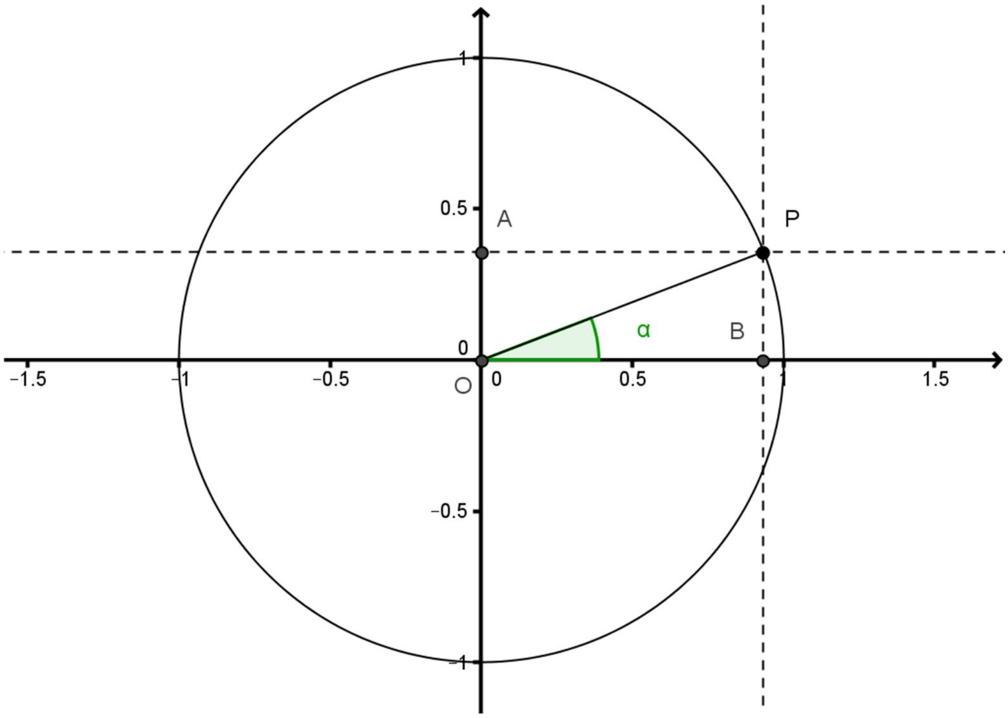
La sua equazione, come è noto dalla geometria analitica, è:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Questa particolare circonferenza, scelta perché è la più semplice, è nota come **CIRCONFERENZA GONIOMETRICA**.

Consideriamo un punto sulla circonferenza. Il raggio che unisce il centro al punto forma un angolo α con l'asse x.

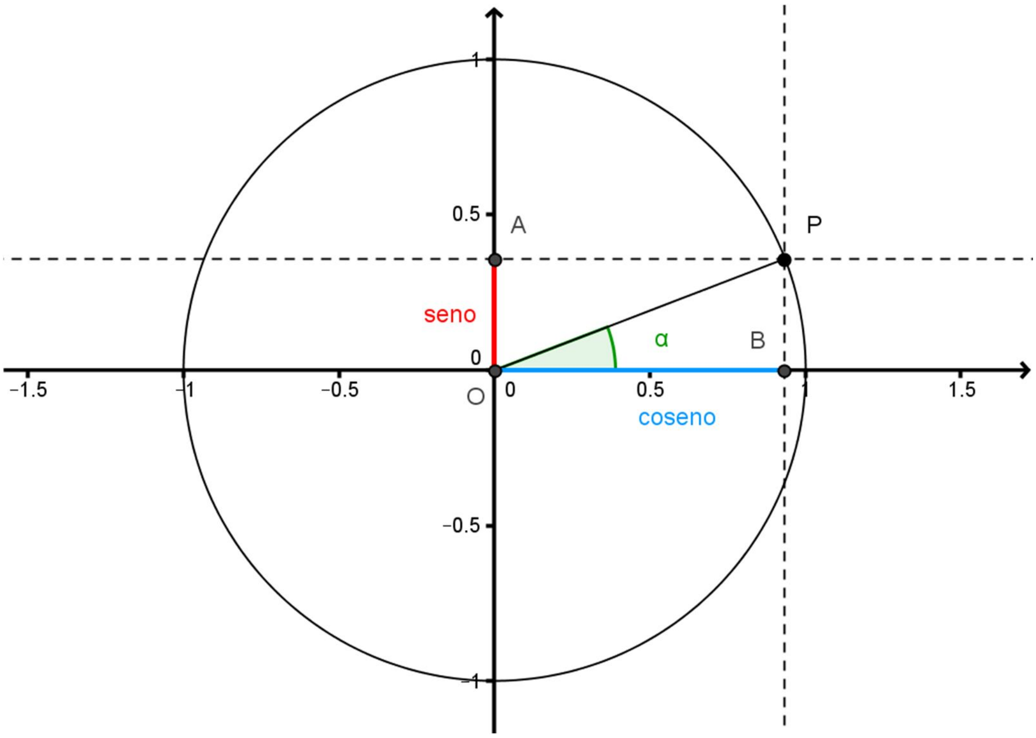
Adesso tracciamo le proiezioni di P sui due assi:



Le proiezioni individuano sugli assi coordinati due segmenti, OA e OB. Questi segmenti hanno una lunghezza che dipende dall'angolo α.

In matematica, questi due segmenti vengono chiamati **SENO** e **COSENO**. In particolare:

- OA = seno dell'angolo α
- OB = coseno dell'angolo α

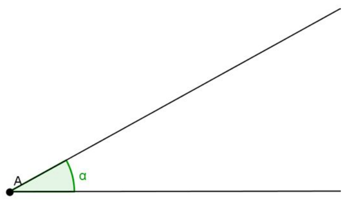


Questi due segmenti variano in lunghezza tra -1 e 1. Infatti il punto P deve stare sulla circonferenza e quindi non può andare oltre le coordinate 1 e -1, sia sull'asse x che sull'asse y.

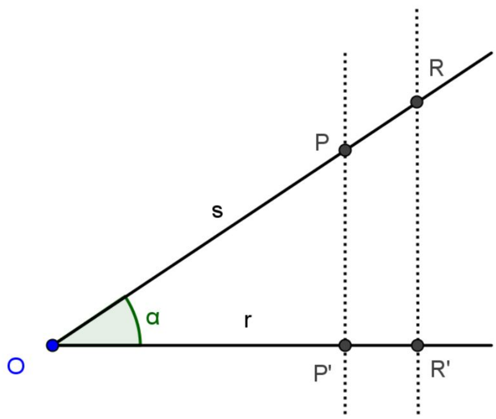
Un'altra lunghezza molto importante nella trigonometria è quella che viene chiamata **TANGENTE**.

La tangente, allo stesso modo del seno e del coseno, è una grandezza che può essere definita per ogni angolo.

Consideriamo, ad esempio, un angolo α, come quello rappresentato nella figura seguente.



L'angolo è formato da due rette s e r. Ora consideriamo dei segmenti perpendicolari ad r che tagliano le due rette nei punti P e P', R e R'.



I triangoli OPP' e ORR' sono simili perché hanno gli angoli uguali. Quindi, se sono simili, avranno i lati in proporzione, cioè OP' è in proporzione con OR' e sua volta PP' è in proporzione con RR':

$$PP':P'O = QQ':Q'O$$

Dunque possiamo scrivere:

$$\frac{PP'}{P'O} = \frac{QQ'}{Q'O} = costante$$

Questa costante prende il nome di **TANGENTE DELL'ANGOLO** α e si scrive col simbolo $\mathbf{tan(\alpha)}$ o anche $\boldsymbol{tg(\alpha)}$.

Nel caso della circonferenza goniometrica, anche l'angolo α (come tutti gli angoli) ha una tangente.

Cerchiamo di capire a cosa corrisponde questo valore sul grafico.

Per individuare la tangente dell'angolo α bisogna tracciare la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel punto (1,0).

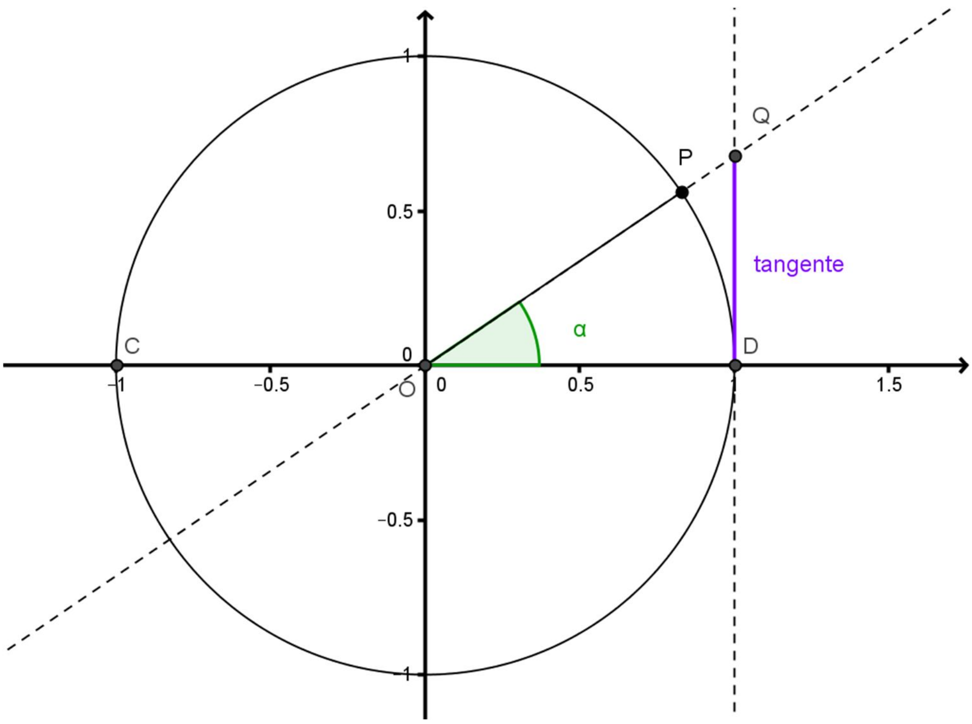
Questa retta individua due punti:

- Il punto Q
- Il punto D

La tangente, come nel caso della tangente di un angolo, è il rapporto tra i due cateti del triangolo rettangolo:

$$\frac{QD}{OD} = \tan(\alpha)$$

Questa volta però $OD = 1$ e quindi la tangente dell'angolo α è il segmento che unisce il punto Q con il punto $D(1{,}0)$.



1.3. *Calcolo del seno, del coseno e della tangente*

Cerchiamo di capire come trovare il seno, il coseno e la tangente di un angolo di cui è nota la misura.

Esistono due modi di procedere:

- con la calcolatrice, se si tratta di un angolo qualunque: ogni calcolatrice scientifica ha tre tasti che consentono di calcolare il seno (SIN), il coseno (COS) e la tangente (TAN).
- con la circonferenza goniometrica, se si tratta di un angolo noto (multipli di 30°, di 45° o di 90°). Se si ha a che fare con un angolo multiplo di 30° o di 45° è possibile trovare i valori del seno, del coseno e della tangente considerando la circonferenza goniometrica.

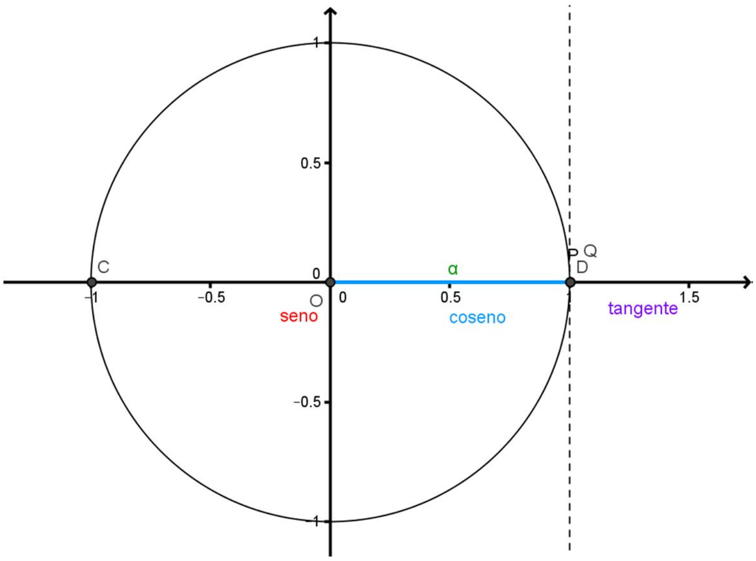
Prima di capire come fare, sono necessarie alcune considerazioni sulla lunghezza dei segmenti seno, coseno e tangente:

- tutti gli **ANGOLI MULTIPLI DI 30°** hanno seno e coseno che possono assumere solo i valori $\frac{1}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (con il segno più o meno) e tangente che può assumere solo i valori $\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (con il segno più o meno). Se un angolo ha seno pari a $\left|\frac{1}{2}\right|$ allora deve avere coseno pari a $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$ e viceversa. Il seno e il coseno di un multiplo di 30° non possono cioè avere lo stesso valore.
- Tutti gli **ANGOLI MULTIPLI DI 45°** hanno seno e coseno che possono assumere solo il valore $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (con il segno più o meno) e tangente che può assumere solo il valore 1 (con il segno più o meno).
- Tutti gli **ANGOLI MULTIPLI DI 90°** hanno seno, coseno e tangente che assumono solo i valori 0 e 1.

Per capire quanto valgono le funzioni seno, coseno e tangente di un angolo, è necessario disegnare l'angolo in questione e cercare di capire graficamente quale di questi valori è il più plausibile (leggendo sull'asse la lunghezza del segmento). Quindi si stabilisce il segno.

Per capire come funziona questa procedura, cominciamo ad analizzare i vari angoli.

$\alpha = 0$



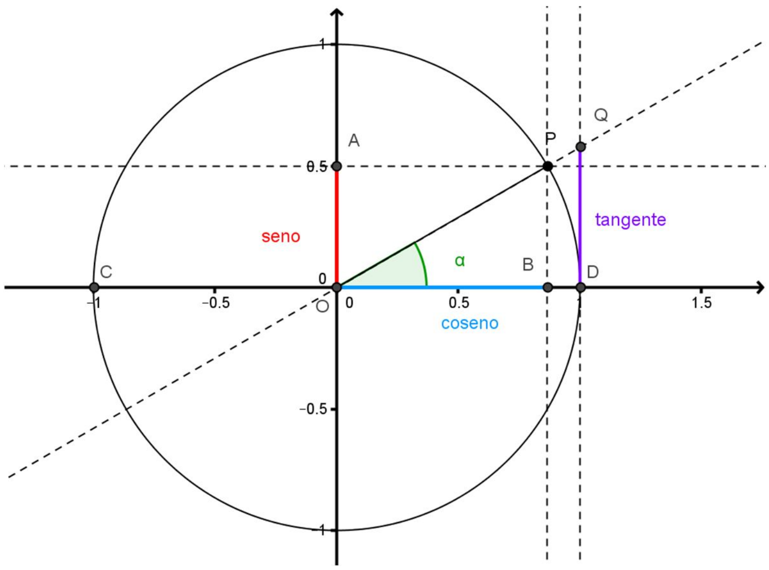
Il coseno coincide con il raggio e quindi è pari a 1; il seno si è annullato, così come la tangente. Quindi:

$$\sin 0° = 0$$

$$\cos 0° = 1$$

$$\tan 0° = 0$$

$\alpha = 30°$



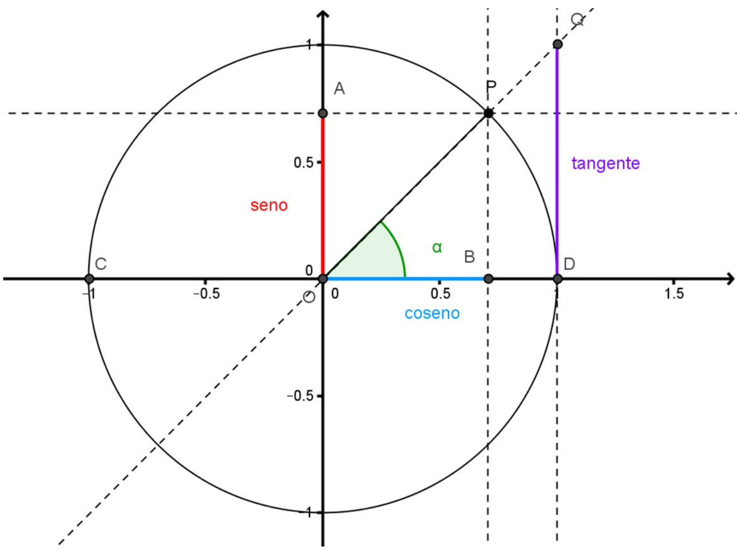
Possiamo vedere facilmente che il seno è lungo metà del raggio, quindi ha valore $\frac{1}{2}$.

Il coseno di conseguenza è lungo $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

La tangente è lunga $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (non può essere $\sqrt{3}$ poiché si vede graficamente che è più piccola di 1).

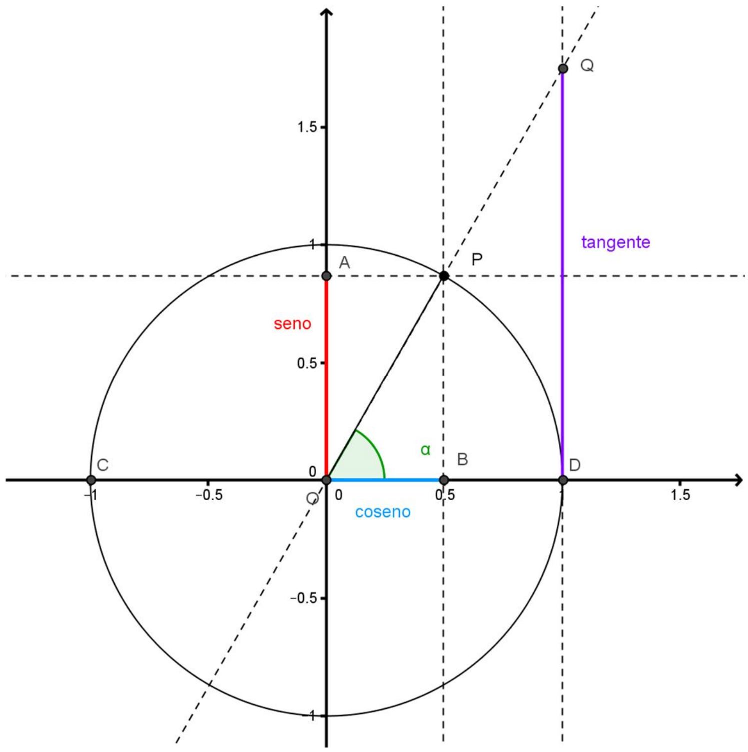
Tutti questi valori sono positivi.

$\alpha = 45°$



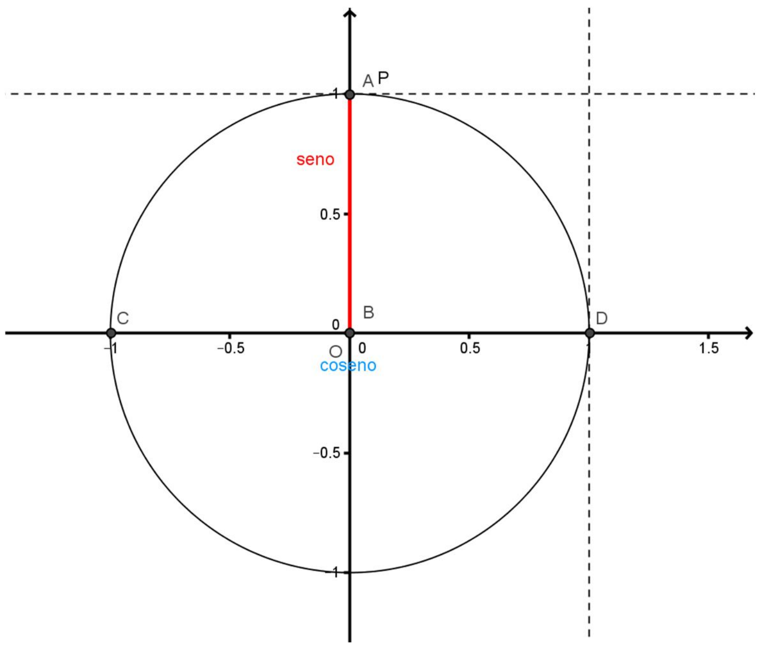
Il seno e il coseno hanno la stessa lunghezza $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e sono entrambi positivi. La tangente è lunga 1. Infatti il triangolo OPB è isoscele, così come il triangolo OQD.

α = 60°



Il seno è più lungo del coseno, quindi sarà lui a valere $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e il coseno varrà $\frac{1}{2}$. Entrambi hanno segno positivo. La tangente invece è maggiore di 1, quindi varrà $\sqrt{3}$, con segno positivo.

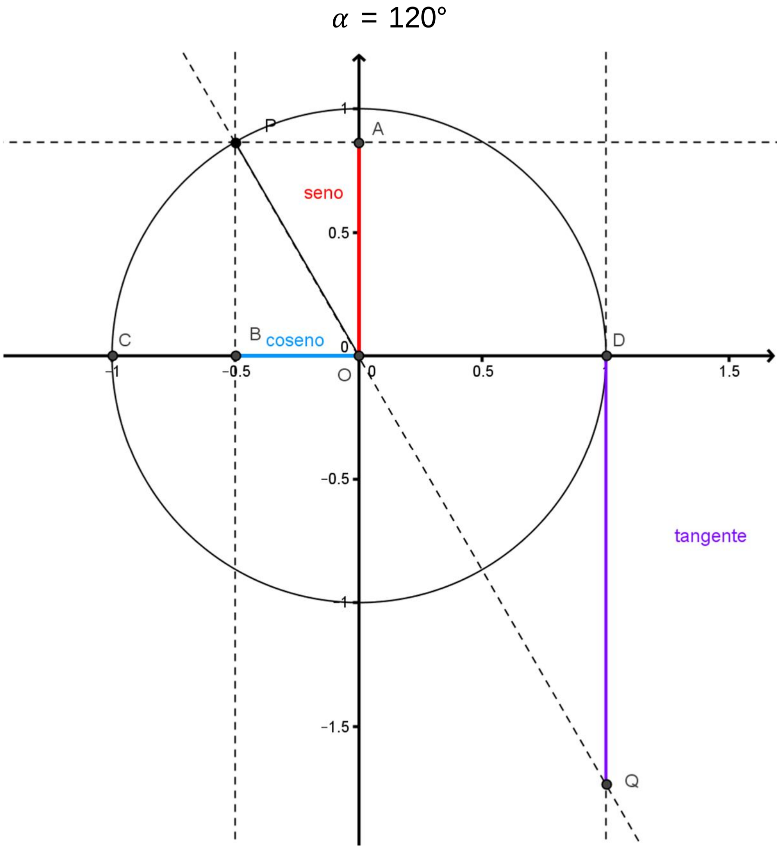
α = 90°



Quando l'angolo è di 90° il seno vale 1 e il coseno vale zero.

Quello che crea qualche problema è la tangente: la retta OP diventa verticale e coincidente con l'asse y. La tangente diventa così grande da essere infinita.

Quindi si dice che la tangente di un angolo α = 90° vale infinito. Incontreremo spesso l'infinito, indicato con il simbolo ∞.



Questa volta il coseno si trova dalla parte negativa del semiasse delle x e quindi avrà valore $-\frac{1}{2}$.

Il seno invece è positivo ed ha valore $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

La tangente è anch'essa negativa e vale $-\sqrt{3}$ poiché si vede che è maggiore di 1.

Seguendo questo ragionamento è possibile ricavare il valore del seno e del coseno per tutti gli angoli multipli di 30° o di 45°.

1.4. *Le formule inverse della trigonometria*

Immaginiamo di conoscere il seno di un angolo. Ad esempio, diciamo che il seno dell'angolo β è uguale a $\frac{1}{5}$.

Come possiamo trovare il valore di β?

In pratica dobbiamo risolvere per β la seguente espressione:

$$\sin(\beta) = \frac{1}{5}$$

Se questa fosse un'espressione algebrica, potremmo isolare β con semplici passaggi matematici.

Nel caso della trigonometria però, **L'ANGOLO È RACCHIUSO ALL'INTERNO DEL SENO**: ricordiamoci infatti che il seno è definito a partire da un angolo. Niente angolo, niente seno!

Quindi non possiamo togliere l'angolo da dentro al seno.

O per lo meno non lo possiamo fare con i metodi che conosciamo, ma bisogna utilizzare quella che viene chiamata funzione inversa.

Ogni grandezza trigonometrica ha la sua funzione inversa.

- La funzione inversa del seno si chiama arcoseno e si scrive: $arcsin(k)$
- La funzione inversa del coseno si chiama arcocoseno e si scrive: $\arccos(k)$
- La funzione inversa della tangente si chiama arcotangente e si scrive: $arctan(k)$

Per utilizzare le funzioni inverse è necessario applicare una semplice regola. Innanzi tutto osserviamo che in un'espressione trigonometrica è possibile parlare di argomento per indicare quello che c'è tra parentesi, l'angolo di cui è calcolato il seno.

Inoltre possiamo parlare di risultato per il valore del seno.

risultato argomento

$$k = \sin(\alpha)$$

Nella funzione inversa, l'argomento e il risultato si scambiano posto:

risultato argomento

$$\alpha = \arcsin(k)$$

NELLA FUNZIONE INVERSA, QUELLO CHE ERA L'ARGOMENTO DIVENTA IL RISULTATO E QUELLO CHE ERA IL RISULTATO DIVENTA L'ARGOMENTO.

Ad esempio, per calcolare l'angolo a cui corrisponde un seno pari a 1 si utilizza l'arcoseno:

$$1 = \sin(\alpha) \quad \alpha = \arcsin(1)$$

Con una calcolatrice è possibile calcolare le funzioni inverse utilizzando la seconda funzione dei tasti trigonometrici. Sulle calcolatrici le funzioni trigonometriche inverse sono indicate con i simboli:

$$sin^{-1}$$

$$cos^{-1}$$

$$tan^{-1}$$

ATTENZIONE A NON CONFONDERE LE FUNZIONI INVERSE CON IL RECIPROCO! Questa è solo una notazione adottata sui calcolatori per risparmiare spazio e non può essere utilizzata come notazione matematica!

1.5. *Relazioni della trigonometria*

Esistono alcune formule che legano tra loro il seno, il coseno e la tangente e che sono molto utili per lo svolgimento degli esercizi.

1.5.1. *Secante, cosecante, cotangente*

Il reciproco delle grandezze che abbiamo visto, serve per definire altre grandezze trigonometriche e sono:

la **SECANTE**: definita come il reciproco del coseno

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

la **COSECANTE**: definita come il reciproco del seno

$$csec(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)}$$

la **COTANGENTE**: definita come il reciproco della tangente

$$ctan(\alpha) = \frac{1}{tan(\alpha)}$$

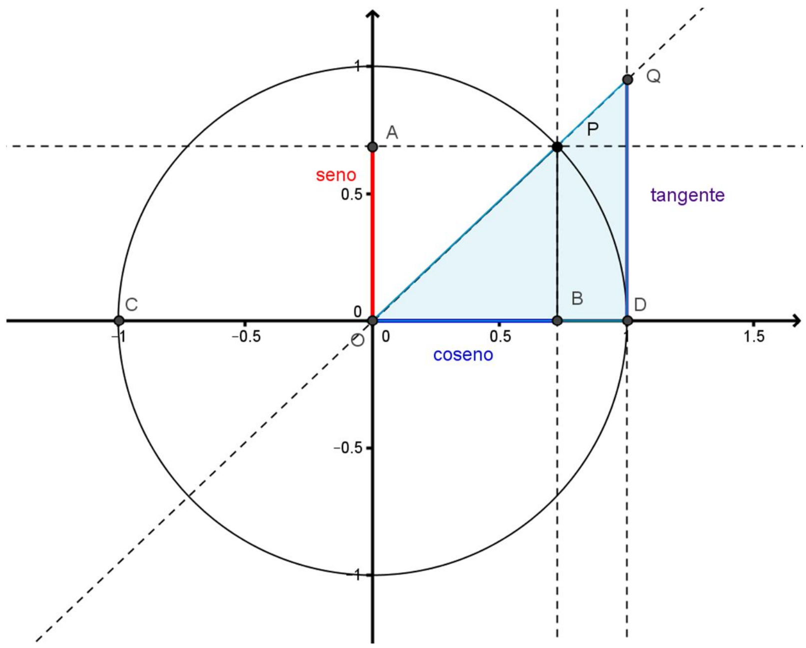
1.5.2. *Le relazioni fondamentali della trigonometria*

Esistono poi due relazioni che vengono chiamate relazioni fondamentali della trigonometria.

La prima di queste due formule è la seguente:

$$\mathbf{\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$

Questa formula deriva dall'osservazione della tangente sulla circonferenza goniometrica.



Abbiamo visto che:

$$\frac{QD}{OD} = \frac{PB}{OB} = costante = \tan(\alpha)$$

E sappiamo che:

$$PB = \sin(\alpha)$$

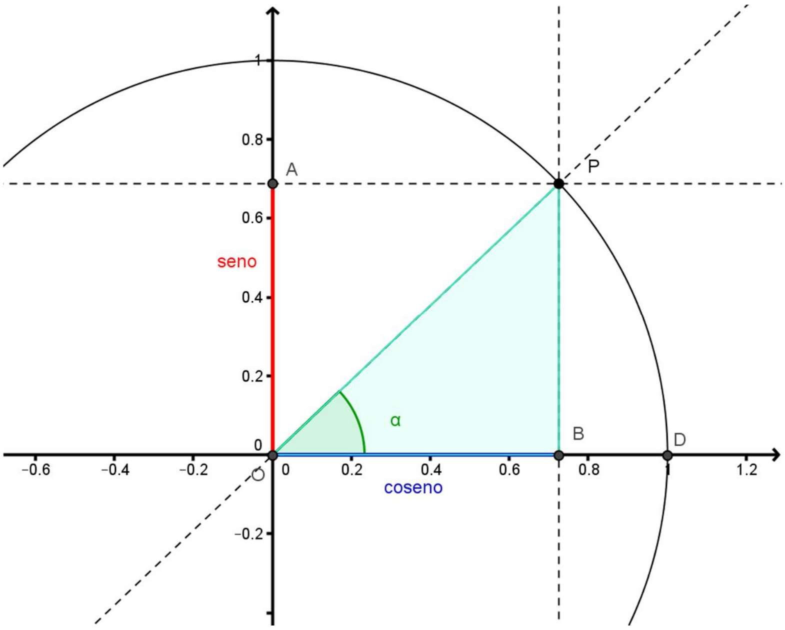
$$OB = \cos(\alpha)$$

Quindi:

$$\frac{PB}{OB} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$$

La prima relazione fondamentale della trigonometria è derivata da qui.

La seconda invece deriva dal teorema di Pitagora applicato al triangolo OBP. I due cateti sono il seno e il coseno, mentre l'ipotenusa è il raggio della circonferenza goniometrica. Quindi:



$$OB^2 + BP^2 = OP^2$$

Sostituendo:

$$\boldsymbol{\cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) = 1}$$

Questa è proprio la seconda relazione fondamentale della trigonometria.

Le due formule fondamentali possono essere unite per trovare altre relazioni che leghino, ad esempio, il seno e la tangente oppure il coseno e la tangente.

Ad esempio, dalla seconda relazione si può ricavare:

$$sin^2(\alpha) = 1 - cos^2(x)$$

$$cos^2(\alpha) = 1 - sin^2(x)$$

Dalla prima relazione, elevando al quadrato, si trova:

$$tan^2(\alpha) = \frac{sin^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)}$$

A questo punto si può sostituire al seno o al coseno l'espressione ricavata prima:

$$tan^2(\alpha) = \frac{1 - cos^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)}$$

Oppure:

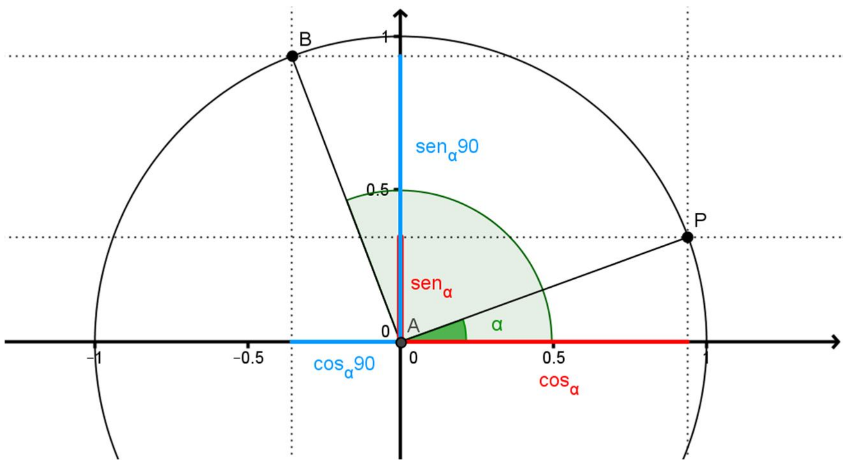
$$tan^2(\alpha) = \frac{sin^2(\alpha)}{1 - sin^2(\alpha)}$$

ste formule possono essere invertite per ricavare il seno o il coseno in funzione della tangente.

1.5.3. *Gli archi associati*

Si è visto che alcuni angoli hanno lo stesso seno o coseno di altri angoli. Queste similitudini possono essere sfruttare per calcolare il valore di alcuni angoli che risultano dalla somma o dalla sottrazione di angoli noti (multipli di 90°) ad un angolo generico.

Ad esempio, si consideri un angolo α di qualunque valore. Conoscendo il seno e il coseno di quest'angolo, si vuole calcolare il valore che assumono il seno e il coseno dell'angolo $\alpha + 90$.



Dal grafico si può notare subito come il coseno dell'angolo 90 + α sia uguale, come lunghezza al seno dell'angolo α, solo che è di segno opposto.

Inoltre il seno dell'angolo 90 + α è uguale, come lunghezza al coseno dell'angolo α e ha lo stesso segno.

Procedendo in questo modo è possibile calcolare qualunque angolo associato ad un angolo multiplo di 90°.

1.5.4. *Le formule goniometriche*

Siano α e β due angoli qualsiasi. Sono sempre valide le seguenti formule:

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

FORMULE DI DUPLICAZIONE:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = cos^2(2\alpha) - sin^2(2\alpha)$$

FORMULE DI BISEZIONE:

$$sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

FORMULE PARAMETRICHE IN T = TG (X/2):

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

2.LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

In questo capitolo studieremo il primo tipo di funzioni trascendenti: quelle trigonometriche.

2.1. *Le funzioni trigonometriche di base*

Riportiamo su un diagramma il valore assunto dal seno per ogni angolo α.

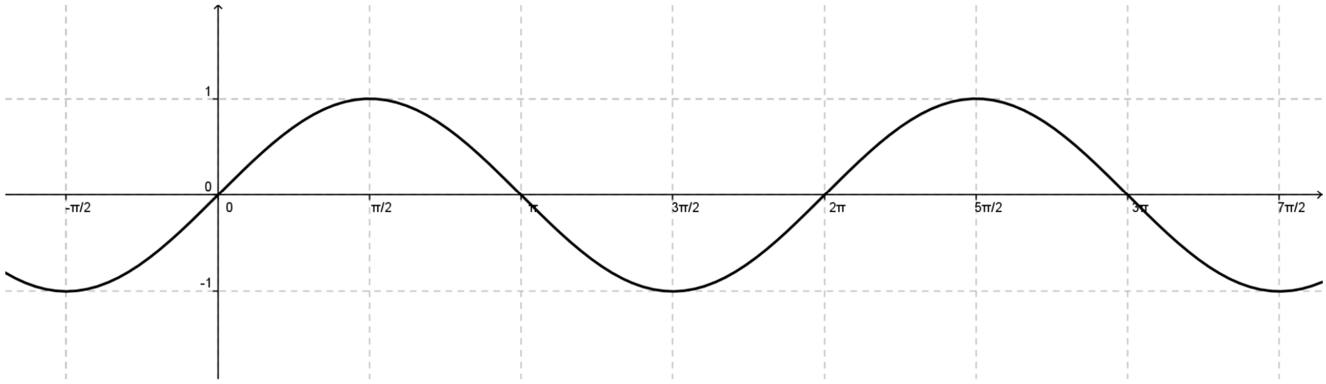
Nella tabella seguente sono indicati i valori del seno, del coseno e della tangente dell'angolo, calcolati con il software EXCEL.

Angolo (deg)	Angolo (rad)	seno	coseno	tangente
0	0	0	1,000	0,000
30	0,524	0,500	0,866	0,577
45	0,785	0,707	0,707	1,000
60	1,047	0,866	0,500	1,732
90	1,571	1,000	0,000	
120	2,094	0,866	-0,500	-1,732
135	2,356	0,707	-0,707	-1,000
150	2,618	0,500	-0,866	-0,577
180	3,142	0,000	-1,000	0,000
210	3,665	-0,500	-0,866	0,577
225	3,927	-0,707	-0,707	1,000
240	4,189	-0,866	-0,500	1,732
270	4,712	-1,000	0,000	
300	5,236	-0,866	0,500	-1,732
315	5,498	-0,707	0,707	-1,000
330	5,760	-0,500	0,866	-0,577
360	6,283	0,000	1,000	0,000

La figura seguente rappresentata la curva che risulta riportando sull'asse delle x i valori dell'angolo e sull'asse delle y i valori del seno.

Come si può notare dal grafico, il seno è una curva che oscilla tra i valori -1 e 1 e che si ripete uguale a se stessa. Si dice che la curva è periodica.

Il seno raggiunge il suo massimo valore per un angolo di $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Il valore minimo si trova in corrispondenza dell'angolo $\frac{3}{2}\pi + 2k\pi$.

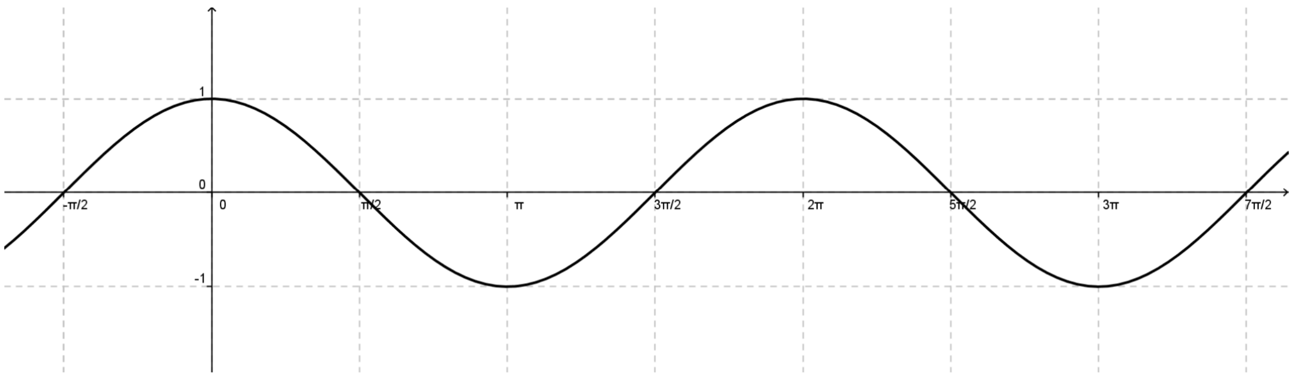


La figura sottostante mostra invece come varia il coseno dell'angolo. Sull'asse x sono sempre riportati i valori dell'angolo e sull'asse y il suo coseno.

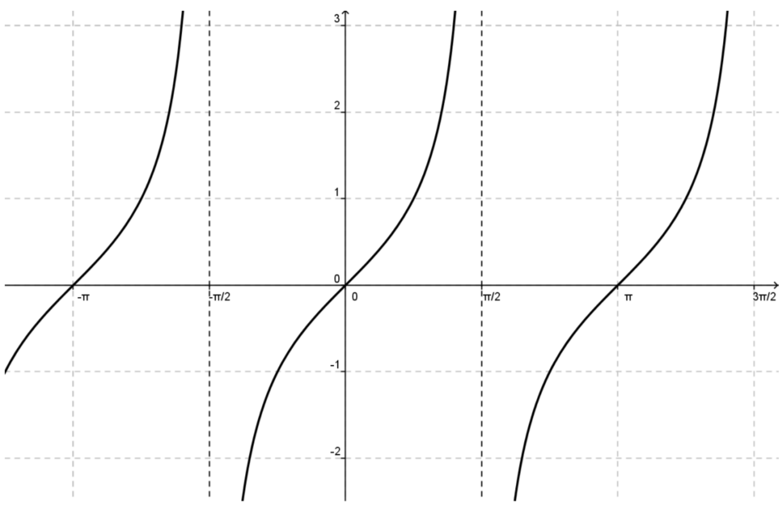
Come si può notare dal grafico, il coseno è sostanzialmente uguale al seno, ma risulta traslato. Parte infatti da 1 anziché da zero.

Anche il coseno ha come valore massimo 1 e come valore minimo -1.

Il valore massimo viene però raggiunto in corrispondenza dell'angolo $2\pi + 2k\pi$, mentre il punto minimo si trova in corrispondenza di un angolo pari a $\pi + 2k\pi$.



Infine vediamo il grafico della tangente. Anche qui sull'asse x ci sono i valori dell'angolo, mentre sull'asse y i valori della tangente.



Dal grafico si nota subito che questa funzione è completamente diversa da quelle precedenti. Questa curva si interrompe in corrispondenza degli angoli $\frac{\pi}{2} + k\pi$ poiché, come abbiamo visto, per questi angoli la tangente diventa infinita.

In questi punti ci sono due asintoti (le linee tratteggiate).

2.2. *Le sinusoidi: significato fisico*

Le curve che abbiamo visto finora avevano all'interno del seno, del coseno o della tangente, la variabile x.

Ci sono però casi in cui al posto della x si trova qualcosa di più complicato.

Ad esempio:

$$y = \cos(2x)$$

In questa funzione si dice che il coseno ha come argomento la funzione 2x.

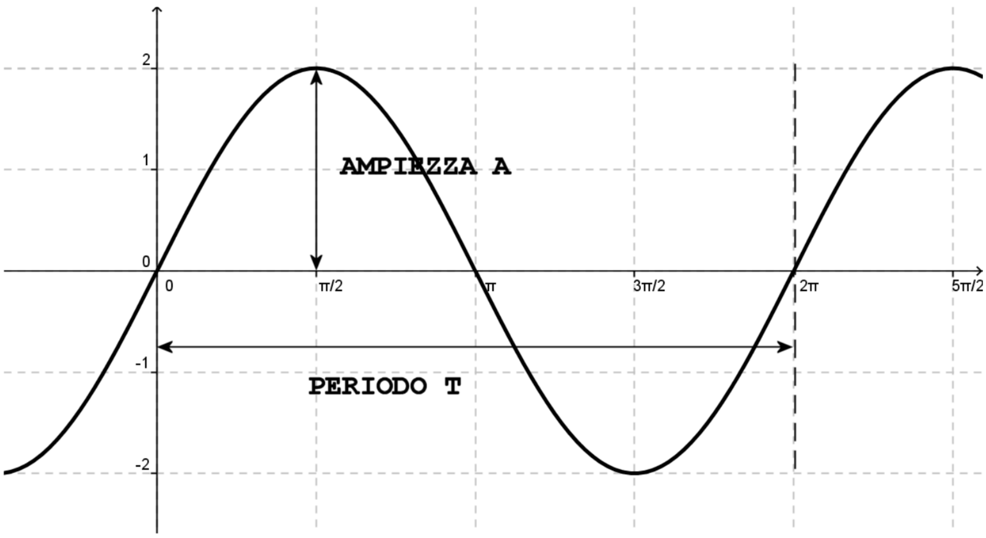
Questa funzione goniometrica è solo una delle tantissime che si possono disegnare.

Una generica funzione sinusoidale ha la seguente espressione matematica:

$$y = A \cdot \sin(\omega x + \varphi)$$

Nella formula troviamo alcune grandezze:

- A è l'**AMPIEZZA** della curva, cioè il valore assoluto sull'asse y dei punti di massimo e di minimo. Nel caso del seno la curva ha ampiezza 1.
- ω è la **VELOCITÀ ANGOLARE** (chiamata anche **PULSAZIONE**) e indica quanto velocemente varia la sinusoide nel tempo. Se stessimo considerando la sinusoide tracciata da un angolo rotante, la velocità angolare ci darebbe la velocità con cui varia l'angolo α, cioè la velocità angolare del vettore rotante associato all'angolo α.
- ϕ è la **FASE** e rappresenta il valore dell'angolo α quando $x = 0$, cioè all'inizio del moto. Nel caso matematico rappresenta semplicemente il valore che assume la funzione quando la variabile indipendente è nulla.



Dal punto di vista fisico una grandezza sinusoidale è caratterizzata dai seguenti parametri:

Periodo T: in quanto tempo la grandezza torna al valore iniziale. Si misura in secondi.

Frequenza f: è l’inverso del periodo

$$f = \frac{1}{T}$$

Si misura in Herz.

Essi sono relazione con le grandezze che compaiono nell’espressione delle sinusoide tramite la seguente formula:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Cioè, la velocità angolare dipende dalla frequenza e quindi dal periodo. Più il vettore ruota velocemente, più la frequenza aumenta, cioè aumenta il numero di giri che il vettore fa in un secondo. E’ un fenomeno abbastanza conosciuto se si pensa ai motori rotanti: quando si dice che un motore fa 3000 giri/secondo mentre un altro fa 1000 giri/secondo si dice che il primo motore gira più veloce del secondo. Questo vuol dire che la sua velocità angolare è maggiore.

3.LE EQUAZIONI GONIOMETRICHE

Nella prima parte abbiamo visto come risolvere le equazioni e le disequazioni algebriche. Adesso passiamo a quelle trascendenti.

Un'equazione è trascendente se la x si trova all'interno di una funzione, tipo quelle trigonometriche, e non può essere tolta senza usare le funzioni inverse.

Per risolvere un'equazione trascendente è necessario per prima cosa capirne la struttura. Le equazioni (e le disequazioni) trascendenti si identificano infatti come quelle algebriche. Quello che cambia sono i metodi risolutivi.

Le equazioni e le disequazioni trascendenti sono di tre tipi:

- Goniometriche: quando la x è racchiusa all'interno del seno, del coseno e della tangente
- Esponenziali: quando la x si trova all'esponente di un numero (ad esempio 3^x)
- Logaritmiche: quando la x si trova all'interno di un operatore matematico chiamato logaritmo che si scrive in questo modo: $\log x$.

Cominciamo con le equazioni goniometriche.

3.1. *Riconoscere il tipo di equazione*

Le equazioni goniometriche principali sono di 3 tipi:

- Elementari
- Lineari
- Omogenee

3.1.1. *Elementari*

Sono delle equazioni che hanno solo una funzione goniometrica (o il seno o il coseno o la tangente). Per risolvere le deve effettuare un cambio di variabile, cioè si deve porre:

$$\sin x = t$$

$$\cos x = t$$

$$\tan x = t$$

a seconda della funzione che compare nell'equazione.

A questo punto si ottiene un'equazione o una disequazione algebrica in t. Questa può essere risolta con i metodi visti precedentemente e alla fine si otterranno dei risultati del tipo $t_1 = a \quad t_2 = b$ eccetera.

E' però necessario ritornare alla variabile originale, che è la x, sostituendo a t il valore numerico trovato.

Si presenta quindi una delle seguenti forme:

$$\sin(x) = a$$
$$\cos(x) = b$$
$$\tan(x) = c$$

Dove a, b, c sono dei numeri. A volte le equazioni elementari si presentano già in questa forma. In questo caso non è necessario utilizzare la variabile sostitutiva.

Come si può notare, in ognuna di esse c'è una sola funzione goniometrica (il seno, il coseno o la tangente) di primo grado. Dunque, **LE EQUAZIONI ELEMENTARI SI RICONOSCONO PERCHÉ IN ESSE COMPARE UN SOLO TIPO DI FUNZIONE TRIGONOMETRICA**.

3.1.2. *Lineari*

Si presentano nella forma:

$$a \cdot \sin(x) + bcos(x) + c = 0$$

Il nome lineare viene dal fatto che se si sostituisce:

$$\sin(x) = Y$$
$$\cos(x) = X$$

Si ottiene:

$$aY + bX + c = 0$$

che è una retta.

LE EQUAZIONI LINEARI SI RICONOSCONO PERCHÉ CI SONO SIA IL SENO CHE IL COSENO, ENTRAMBI DI PRIMO GRADO.

3.1.3. *Omogenee*

Un equazione è omogenea quando i termini dell'equazione hanno tutti lo stesso grado in sen(x) e cos(x). Un omogenea può essere di qualunque grado.

- Omogenea di 1° grado: $a \cdot \sin(x) + b \cdot cos(x)c = 0$
- Omogenea di 2° grado: $a \cdot sin^2(x) + bsin(x) \cdot \cos(x) + c \cdot cos^2(x) = 0$
- Omogenea di 3° grado: $a \cdot sin^3(x) + b \cdot sin^2(x) \cdot \cos(x) + c \cdot cos^2(x) \cdot \sin(x) + d \cdot sin^3(x) = 0$

Per riconoscere un'omogenea è necessario considerare il grado di ogni singolo termine dell'equazione, ricordando che il grado di un monomio è la somma degli esponenti:

$$3a^2b \quad \rightarrow \quad 2 + 1 = 3° \; grado$$
$$\sin x \cdot cos^2x \quad \rightarrow \quad 1 + 2 = 3° \; grado$$

Quando ci si trova di fronte un'equazione omogenea è necessario prestare attenzione alla presenza di eventuali termini noti.

Infatti i termini noti di un equazione (anche algebrica) sono quelli in cui non compare la x e quindi hanno grado zero.

SI consideri ad esempio il polinomio: $x^2 + 2yx + y^2 + 3$

I primi tre termini sono di secondo grado mentre l'ultimo può essere scritto come: $3x^0y^0$ poiché qualunque numero elevato a zero fa 1. Quindi **I TERMINI NOTI HANNO SEMPRE GRADO ZERO**.

Un'equazione che sembra omogenea ma ha un termine noto non è omogenea.

Un omogenea di primo grado con il termine noto è una lineare.

Invece un omogenea di 2° grado con il temine noto può essere ricondotta ad una vera e propria omogenea utilizzando il trucchetto seguente.

Consideriamo l'equazione:

$$a \cdot sin^2x + b \cdot sinx \cdot cosx + c \cdot cos^2x + d = 0$$

Moltiplichiamo per 1 il temine noto:

$$a \cdot sin^2x + b \cdot sinx \cdot cosx + c \cdot cos^2x + d \cdot 1 = 0$$

Ricordando la prima equazione fondamentale della trigonometria:

$$sin^2x + cos^2x = 1$$

Possiamo scrivere:

$$a \cdot sin^2x + b \cdot sinx \cdot cosx + c \cdot cos^2x + d \cdot (sin^2x + cos^2x) = 0$$

Adesso l'equazione è davvero omogenea:

$$a \cdot sin^2x + b \cdot sinx \cdot cosx + c \cdot cos^2x + d \cdot sin^2x + d \cdot cos^2x = 0$$

$$(a + d) \cdot sin^2x + b \cdot sinx \cdot cosx + (c + d) \cdot cos^2x = 0$$

3.2. ***Risolvere le equazioni: metodi***

Il primo passo per risolvere un equazione è capire in quale categoria ricade.

Può succedere che un'equazione non ricada in nessuna delle precedenti categorie. In questo caso non esiste una regola generale, ma bisogna cercare di trasformare l'equazione data in una delle 3 sopraelencate tramite le formule goniometriche o le equazioni fondamentali della trigonometria.

Il caso più frequente che si può presentare è quello in cui gli argomenti delle varie funzioni goniometriche non sono tutti uguali. In quel caso è necessario trasformarli tutti in un unico argomento.

Ad esempio:

$$\mathbf{\sin(x + \pi)} + \cos x = 0$$

Tramite gli archi associati si ottiene:

$$\mathbf{-\sin x} + \cos x = 0$$

che è lineare.

Se invece gli argomenti, pur essendo diversi da x sono tutti uguali non è necessario trasformarli: basta cambiare la variabile.

Ad esempio:

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

In questo caso si pone:

$$2x + \frac{\pi}{3} = t$$

e l'equazione diventa:

$$\sin t + \cos t = 0$$

Alla fine ovviamente bisognerà ritornare alla variabile originale.

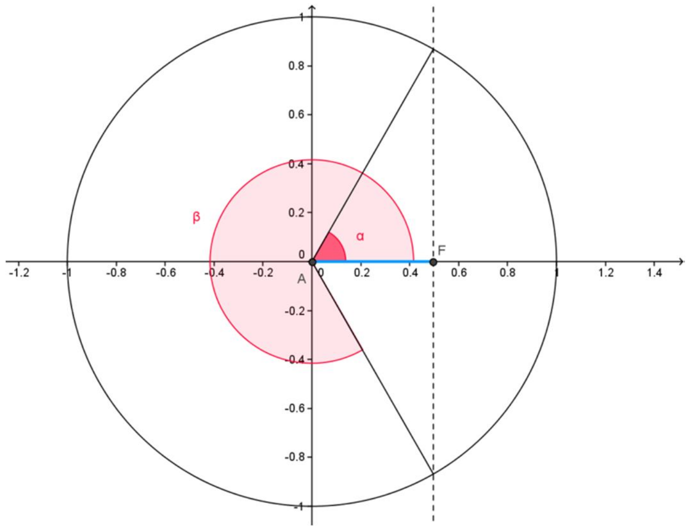
Una volta stabilito in che categoria l'equazione ricade esistono diversi metodi risolutivi. Di seguito sono presentati i metodi più semplici, uno per ogni categoria.

3.2.1. *Equazioni goniometriche elementari*

Il metodo più semplice consiste nell'utilizzare una calcolatrice abbinata alla circonferenza goniometrica.

Esempio 1

$$\mathbf{\sin(x) = \frac{1}{2}}$$



Per prima cosa si traccia la linea che indica dove il seno vale 0,5. Questa retta interseca la circonferenza goniometrica in due punti. Ci sono quindi due angoli a cui corrisponde un seno pari a 0,5.

Tramite la calcolatrice:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$$

L'altro angolo si trova per simmetria:

$$180° - 30° = 150°$$

Quindi il risultato è:

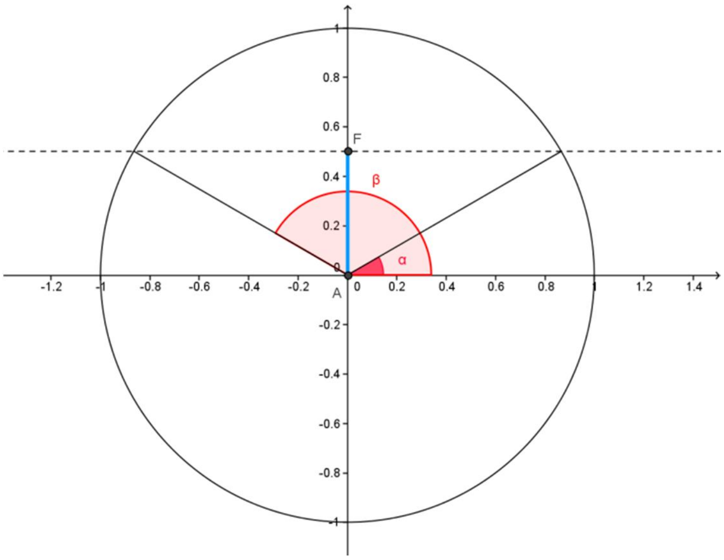
$$x_1 = 30° + k360°$$

$$x_2 = 150° + k360°$$

ATTENZIONE: è sempre necessario indicare il periodo della funzione ($k360°$) perché ogni 360° il seno riassume lo stesso valore. Ovviamente se il risultato è espresso in radianti, anche il periodo si deve esprimere in radianti ($2k\pi$).

Esempio 2

$$\mathbf{cos}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$



Per prima cosa si traccia la linea che indica dove il coseno vale 0,5. Questa retta interseca la circonferenza goniometrica in due punti. Ci sono quindi due angoli a cui corrisponde un coseno pari a 0,5.

Tramite la calcolatrice:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$$

L'altro angolo si trova per simmetria:

$$360° - 60° = 300°$$

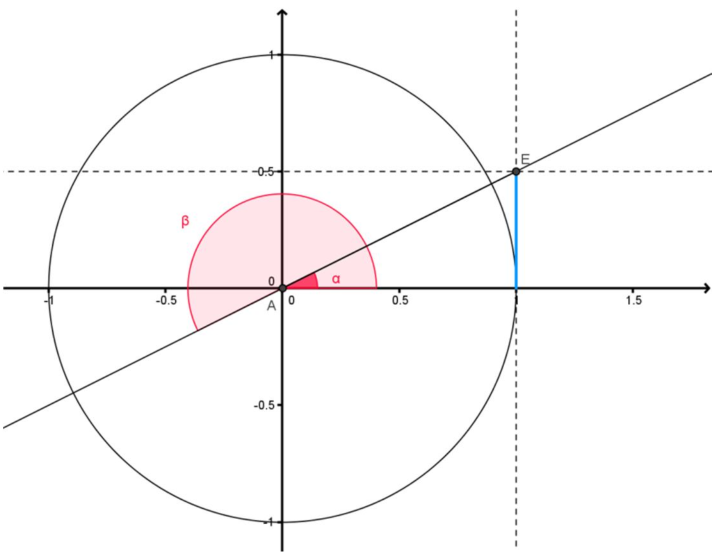
Quindi il risultato è:

$$x_1 = 60° + k360°$$

$$x_2 = 300° + k360°$$

Esempio 3

$$\mathbf{tan}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$



Per prima cosa si traccia la linea che indica dove la tangente vale 0,5. Questa retta interseca la circonferenza goniometrica in due punti, sfasati di 180°. Ci sono quindi due angoli a cui corrisponde un tangente pari a 0,5.

Tramite la calcolatrice:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 26{,}56°$$

L'altro angolo si trova per simmetria:

$$180° + 26{,}56° = 206{,}56°$$

I due risultati sono sempre sfasati di 180°, quindi è possibile scriverne solo uno e aggiungere il periodo:

$$x = 26° + k180°$$

3.2.2. ***Equazioni goniometriche lineari***

Il metodo più semplice per risolverle è il metodo delle equazioni parametriche.

Secondo questo metodo si sostituiscono alle funzioni goniometriche i loro valori parametrici:

$$\boldsymbol{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}}$$

$$\boldsymbol{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

Si ottiene un'equazione algebrica nella variabile t. Una volta risolta si ottengono dei risultati del tipo $t_1 = a$ e si deve ritornare alla variabile originale x ricordando che:

$$\boldsymbol{t = tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Vediamo un esempio:

$$2\,\mathbf{sin}(\boldsymbol{x}) - 3\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{x}) + 1 = 0$$

Sostituiamo con le parametriche:

$$2\frac{\boldsymbol{2t}}{\boldsymbol{1+t^2}} - 3\frac{\boldsymbol{1-t^2}}{\boldsymbol{1+t^2}} + 1 = 0$$

Facciamo il minimo comune multiplo:

$$\frac{4t - 3 + 3t^2 + 1 + t^2}{1+t^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2t^2 + 2t - 1}{1+t^2} = 0$$

Che si risolve ponendo $N = 0$

$$2t^2 + 2t - 1 = 0$$

Da cui si ottiene:

$$\boldsymbol{t_1} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$$

$$\boldsymbol{t_2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

Torniamo ora alla variabile originale:

$$\boldsymbol{t_1 = \tan\left(\frac{x_1}{2}\right)} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{x_1}{2} = arctan\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \cong -54° + k180° \qquad x_1 = -108° + k360$$

$$\boldsymbol{t_2 = \tan\left(\frac{x_2}{2}\right)} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{x_2}{2} = arctan\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \cong 20° + k180° \qquad x_2 = 40° + k360$$

E' necessario ricordare che quando si moltiplica un angolo bisogna moltiplicare anche il suo periodo.

3.2.3. *Equazioni goniometriche omogenee*

Un'equazione omogenea si risolve dividendo tutto per $\cos x$ elevato al grado dell'equazione.

Nel caso di un'omogenea di primo grado:

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{a \cdot \sin x}{\cos x} + \frac{b \cdot \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x} \quad \rightarrow \quad a \cdot \tan x + b = 0$$

Nel caso di un omogenea di secondo grado:

$$a \cdot sin^2x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot cos^2x = 0$$

$$\frac{a \cdot sin^2x}{cos^2x} + \frac{b \cdot \sin x \cdot \cos x}{cos^2x} + \frac{c \cdot cos^2x}{cos^2x} = \frac{0}{cos^2x} \quad \rightarrow \quad a \cdot tan^2x + btan\, x + c = 0$$

A questo punto si risolve come un'equazione elementare.

Vediamo un esempio:

$$3sin^2x - 2cos^2x - \sqrt{3}\sin x \cos x = 0$$

$$\frac{3sin^2x}{cos^2x} - \frac{2cos^2x}{cos^2x} - \frac{\sqrt{3}\sin x \cos x}{cos^2x} = 0 \quad \rightarrow \quad 3tan^2x - \sqrt{3}\tan x - 2 = 0$$

Ora si risolve l'equazione come elementare:

$$\tan x = t$$

$$3t^2 - \sqrt{3}t - 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{27}}{6} = \frac{\sqrt{3} \pm 3\sqrt{3}}{6} = \begin{cases} t_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3} \\ t_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Quindi:

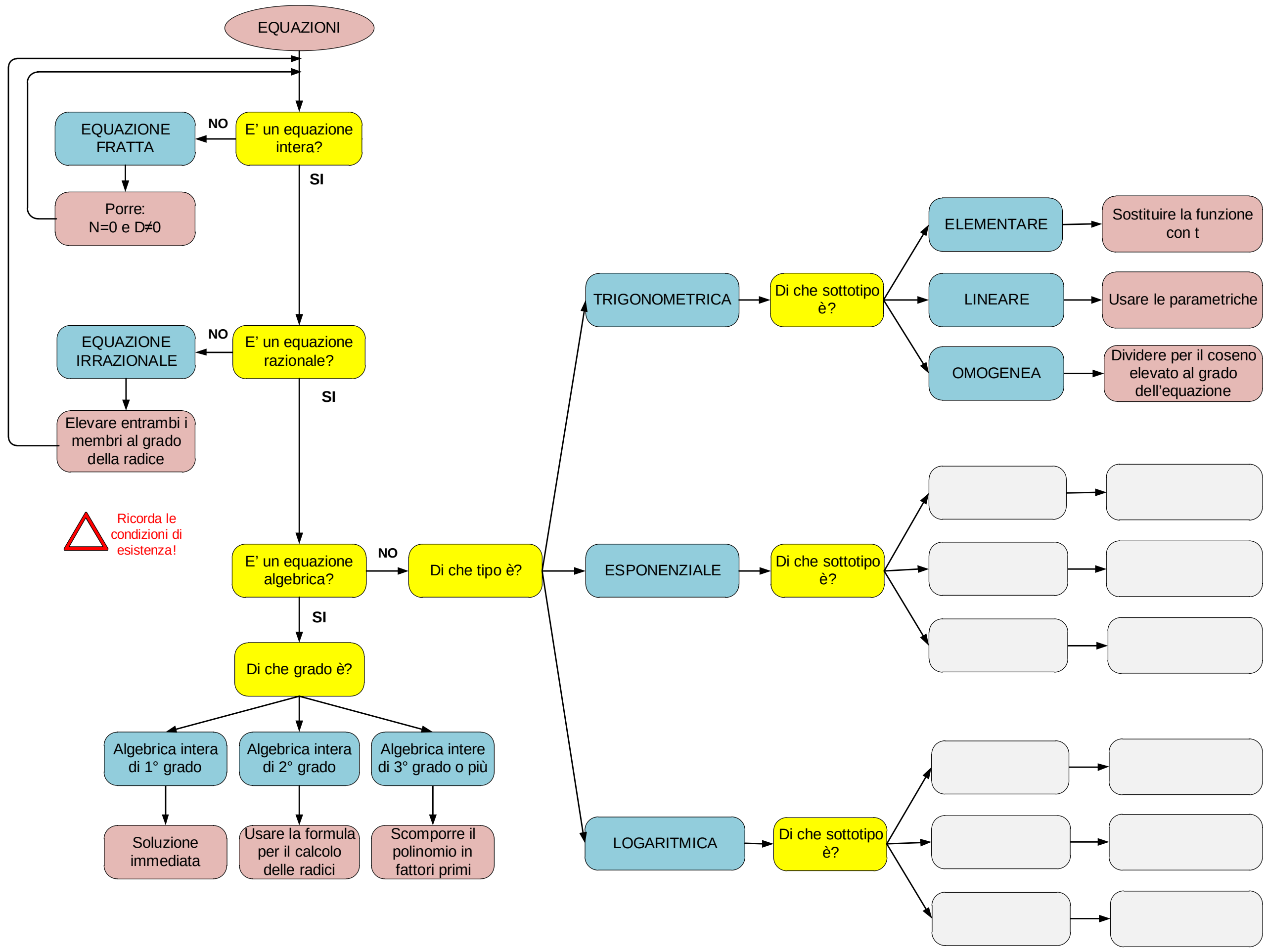
$$\tan x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad x = \arctan\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad x = \arctan\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Riassumendo, quando ci si trova di fronte ad un equazione bisogna domandarsi di che tipo è ponendosi le seguenti domande:

- E' intera o fratta?
- E' razionale o è irrazionale?
- E' algebrica o trascendente?
- A quale sottocategoria appartiene?

Lo schema seguente aiuta a capire come ragionare:



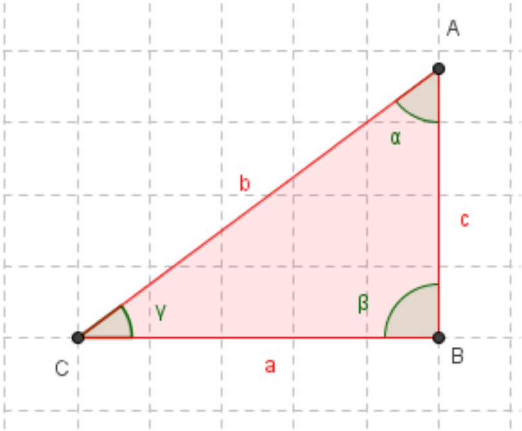
4.I PROBLEMI DI TRIGONOMETRIA

Esistono molti teoremi dei triangoli, ma qui ne vedremo solo alcuni: due riguardano i triangoli rettangoli e quattro riguardano i triangoli qualsiasi.

4.1. Teoremi dei triangoli rettangoli

Cominciamo da quelli sui triangoli rettangoli.

Consideriamo un triangolo rettangolo con i seguenti nomi per i vertici, per i lati e per gli angoli:



TEOREMA 1: in un qualsiasi triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale alla misura dell'ipotenusa moltiplicata per il seno dell'angolo opposto o per il coseno dell'angolo adiacente:

$$c = b \cdot \sin(\gamma) = b \cdot \cos(\alpha)$$
$$a = b \cdot \sin(\alpha) = b \cdot \cos(\gamma)$$

Questo teorema lega tra loro un cateto, l'ipotenusa e un angolo non retto. Si può usare ogni volta che sono noti due di questi elementi e si vuole trovare il terzo.

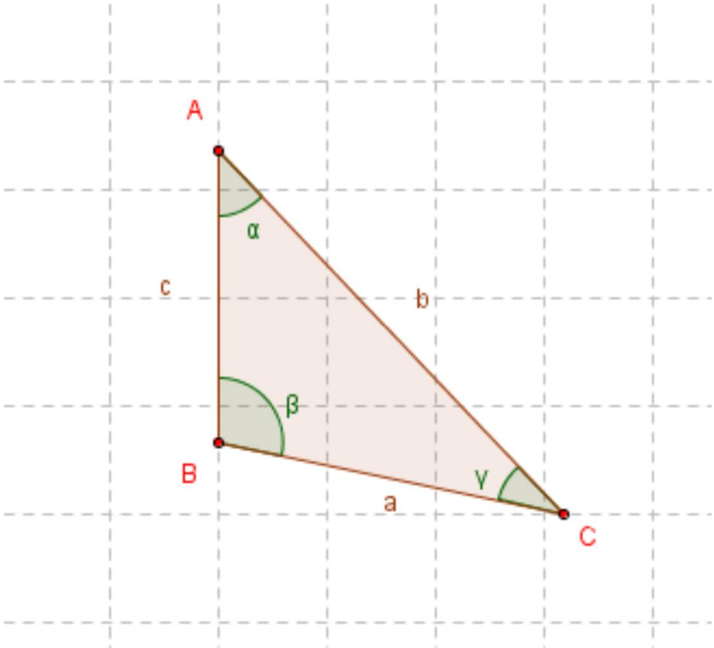
TEOREMA 2: In un qualsiasi triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale alla misura dell'altro cateto moltiplicata per la tangente dell'angolo opposto o per la cotangente dell'angolo adiacente:

$$c = a \cdot \tan(\gamma) = a \cdot cotan(\alpha)$$
$$a = c \cdot \tan(\alpha) = c \cdot cotan(\gamma)$$

Questo teorema lega tra loro due cateti e un angolo non retto. Si può usare ogni volta che sono noti due di questi elementi e si vuole trovare il terzo.

4.2. *Teoremi dei triangoli qualsiasi*

Passiamo ora ai teoremi dei triangoli qualsiasi. Consideriamo un triangolo con i seguenti nomi per i vertici, per i lati e per gli angoli:



TEOREMA DI CARNOT O DEL COSENO: In un qualsiasi triangolo il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati meno il doppio prodotto di questi ultimi e del coseno dell'angolo opposto al lato da calcolare:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos(\beta)$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot cos(\gamma)$$

Questo teorema lega tra loro tre lati e un angolo.

TEOREMA DEI SENI: In un qualsiasi triangolo le misure dei lati sono proporzionali ai seni degli angoli ad essi opposti:

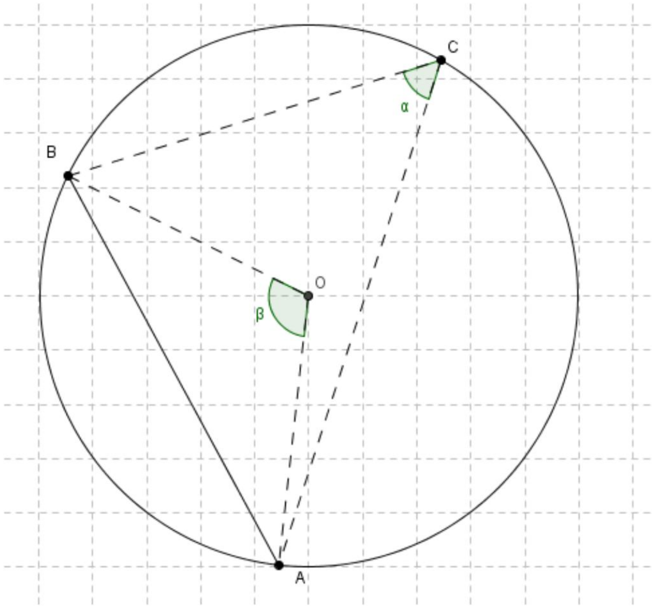
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$
$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

Questo teorema lega tra loro due lati e due angoli.

TEOREMA DELLA CORDA: La misura di una corda di una circonferenza è uguale al prodotto tra la misura del diametro ed il seno di uno qualunque degli angoli alla circonferenza che insistono su uno dei due archi sottesi dalla corda, oppure è uguale al prodotto del diametro per il seno della metà dell'angolo al centro:

$$AB = d \cdot \sin(\alpha)$$

$$AB = d \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

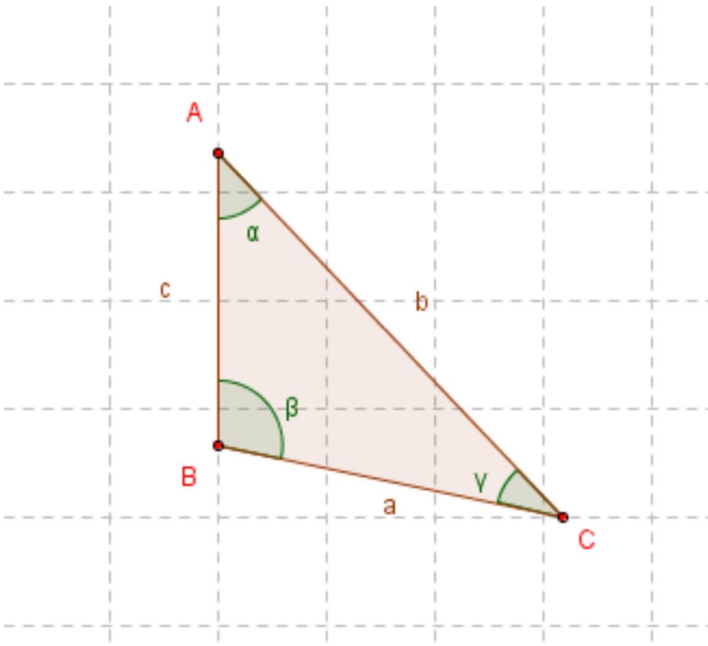


TEOREMA DELL'AREA: l'area di un qualsiasi triangolo si ottiene moltiplicando due lati e il seno dell'angolo tra essi compreso e dividendo tutto per due:

$$Area = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

$$Area = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin(\gamma)$$

$$Area = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin(\beta)$$



4.3. *Risolvere i problemi di trigonometria*

Per risolvere i problemi di trigonometria si può utilizzare la tecnica del diagramma di flusso, utile anche per i problemi di fisica o di altre materie. Questa tecnica si compone di tre passaggi.

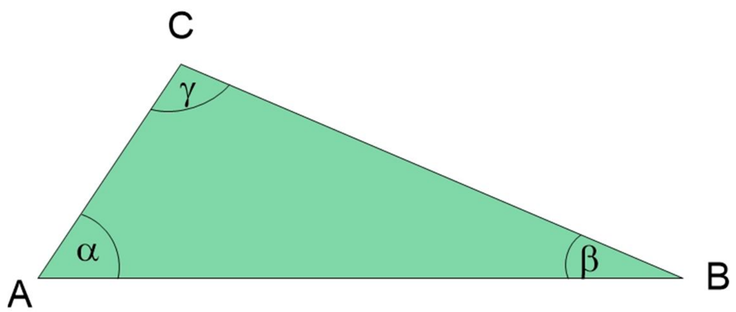
1. Leggere, disegnare, scrivere dati e incognite
2. Creare un diagramma di flusso
3. Usare il diagramma di flusso per fare i calcoli

Per capire cosa significano e come si svolgono questi tre passaggi vediamo un esempio.

Si calcoli l'area del triangolo ABC sapendo che due angoli misurano 50° e 30° e che il lato opposto all'angolo di 30: misura 4 cm.

- **PASSAGGIO 1**: la prima cosa fare quando ci si trova di fronte ad un problema è leggerlo, trovare i dati e le incognite e fare un disegno.

Il triangolo ABC, poichè non è specificato diversamente, è un triangolo generico (scaleno, non rettangolo):



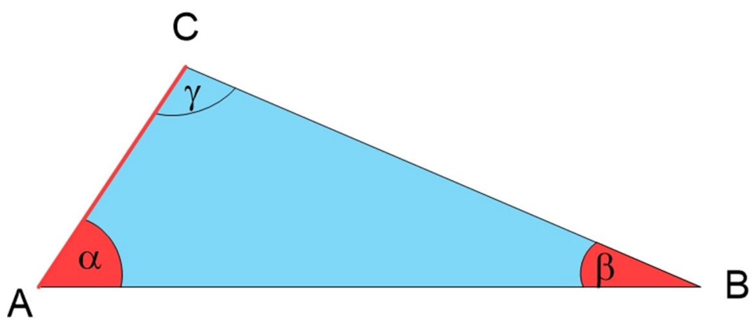
Sappiamo che due angoli valgono 50° e 30°. Nel testo del problema non è specificato come si chiamano questi due angoli, ma secondo il disegno che abbiamo fatto conviene porre:

$$\alpha = 50°$$
$$\beta = 30°$$

Sappiamo anche che il lato opposto a $\beta = 30°$ misura 4 cm, quindi:

$$AC = 4\ cm$$

Dunque:



DATI:

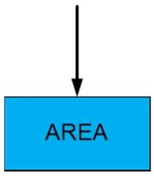
α = 50°
β = 30°
AC = 4 cm

INCOGNITE:

Area=?

- **PASSAGGIO 2**: a questo punto possiamo **COSTRUIRE IL DIAGRAMMA DI FLUSSO** e per farlo iniziamo dal fondo.

Nella parte bassa della pagina scriviamo che cosa dobbiamo trovare, la nostra incognita, quello che sarà il nostro risultato. Nell'esempio, l'incognita è l'area del triangolo:



Per trovare la nostra incognita dobbiamo usare una formula. La difficoltà sta nel capire quale formula deve essere utilizzata. Avendo presente tutti i teoremi che abbiamo visto nei due paragrafi precedenti, possiamo selezionare un certo numero di formule che contengono la grandezza che dobbiamo trovare. Se siamo fortunati ci sarà solo una formula che contiene la grandezza che stiamo cercando. Se invece ce n'è più di una esiste la possibilità che quella che abbiamo scelto ci conduca ad un vicolo cieco. Con un po' di esperienza è possibile capire quale formula deve essere utilizzata, ma le prime volte è solo questione di fortuna…

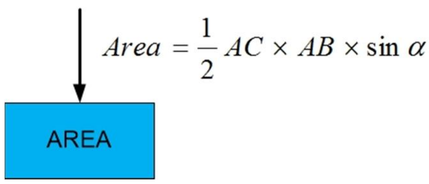
Nel nostro esempio, possiamo usare la generica formula per il calcolo dell'area:

$$Area = \frac{base \times altezza}{2}$$

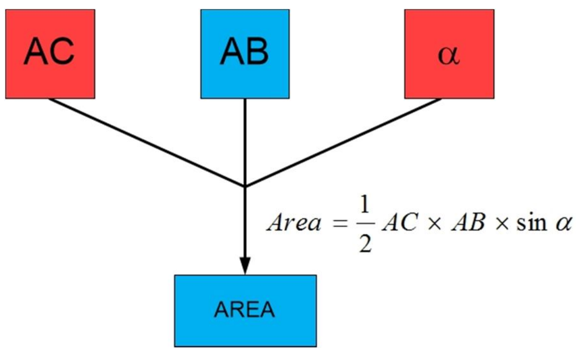
Oppure il teorema dell'area:

$$Area = \frac{1}{2} AC \times AB \times \sin(\alpha)$$

Scegliamo la seconda formula:

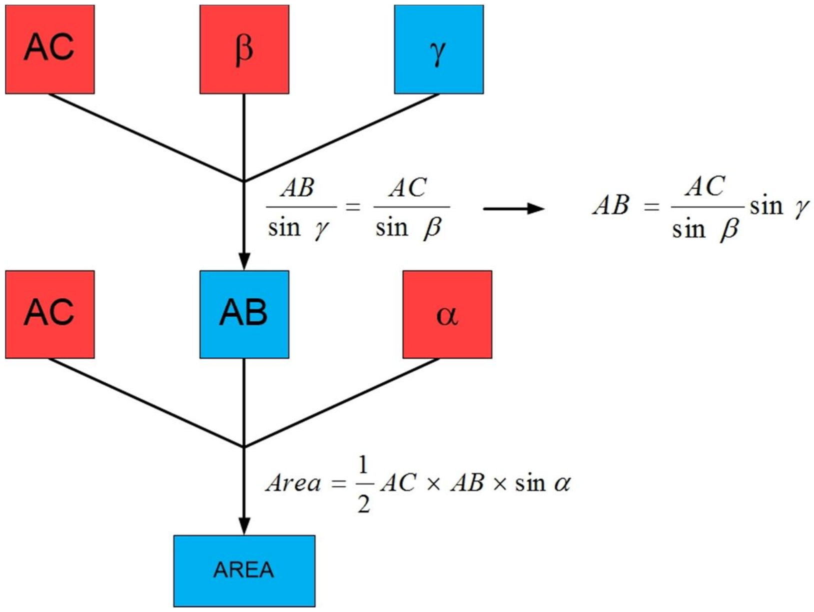


Una volta scelta la formula da utilizzare dobbiamo invertirla, isolando l'incognita, e ci dobbiamo domandare quali grandezze sono necessarie per calcolarla. Nel nostro caso non è necessario invertirla perché la formula si presenta già con l'area in evidenza:



Se queste grandezze sono note abbiamo finito, altrimenti dobbiamo ripetere la procedura adottata fin qui. Nel nostro caso conosciamo AC e α, ma non sappiamo quanto vale AB.

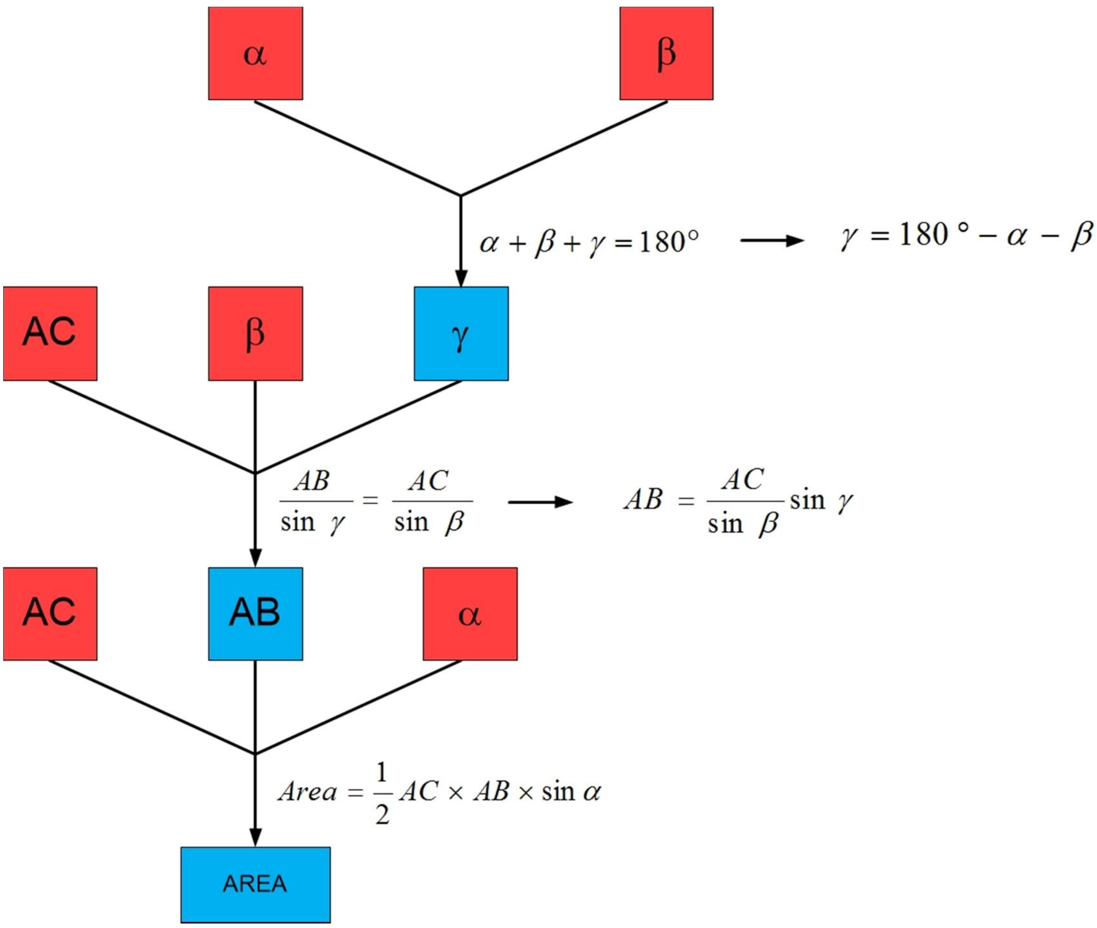
Tra tutti i teoremi che abbiamo a disposizione possiamo usare quello dei seni:



Abbiamo ancora un'incognita, cioè l'angolo γ, che però possiamo trovare sapendo quando valgono gli altri due poiché:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Mettendo tutti insieme abbiamo costruito il diagramma di flusso che ci consentirà di risolvere l'esercizio:



- **PASSAGGIO 3**: una volta finito il diagramma di flusso, dobbiamo **ESEGUIRE LE OPERAZIONI**, questa volta partendo dall'inizio.

Nel nostro esempio dobbiamo svolgere tre operazioni:

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 50° - 30° = 100°$$

$$AB = \frac{AC}{\sin\beta}\sin\gamma = \frac{4\ cm}{\sin 30°}\sin 100° = 7{,}9\ cm$$

$$Area = \frac{1}{2} \times AC \times AB \times \sin\alpha = \frac{1}{2} \times 4 \times 7{,}9 \times \sin 50° = 12{,}1\ cm^2$$

5.GLI ESPONENZIALI E I LOGARITMI

Nella prima parte abbiamo studiato le funzioni trigonometriche. Ora dobbiamo studiare gli altri due tipi di funzioni trascendenti: le funzioni esponenziali e le funzioni logaritmiche.

Lo studio di questi due tipi di funzione richiede la conoscenza del concetto di potenza.

Facciamo quindi un rapido ripasso di questo argomento.

5.1. *Le potenze*

Con il termine potenza si indica un numero che viene moltiplicato per se stesso un certo numero di volte.

Il termine che indica il numero da moltiplicare per se stesso si chiama base; il numero di volte per cui deve essere effettuata la moltiplicazione viene scritto come apice della base e prende il nome di esponente.

$$\boldsymbol{a^b = c}$$

dove:

- **a** è la **BASE**
- **b** è l'**ESPONENTE**
- **c** è il **RISULTATO**

Le potenze godono di alcune proprietà che devono essere note per poter svolgere gli esercizi.

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$$

$$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$$

$$(a^n)^k = a^{n \cdot k}$$

5.2. *La funzione esponenziale*

La funzione esponenziale è una funzione in cui la variabile indipendente è l'esponente di un numero reale positivo:

$$y = a^x$$

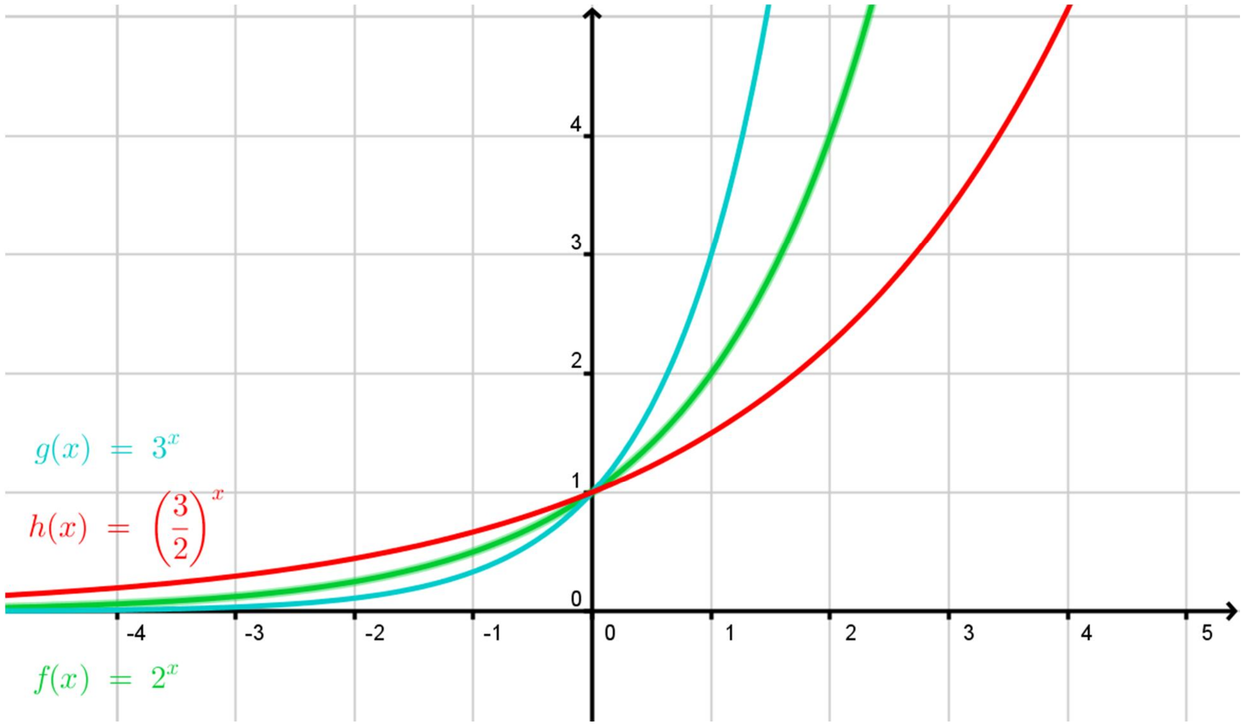
Attenzione a non confondersi con una potenza: nelle potenze l'esponente è un numero e la variabile x sta alla base; negli esponenziali la variabile x è all'esponente mentre la base è un numero.

Il grafico della funzione esponenziale cambia a seconda della base. Possiamo distinguere tre casi:

- base maggiore di 1
- base uguale a 1
- base compresa tra 0 e 1

6.2.1. *Caso* $a > 1$

La funzione esponenziale passa per il punto (1,1). Nel semipiano positivo delle x cresce sempre di più, mentre nel semipiano negativo delle x decresce avvicinandosi all'asse y.



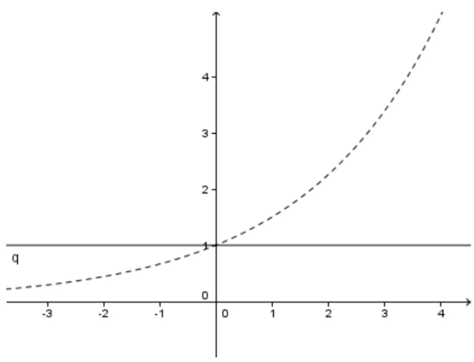
Osservando le tre funzioni rappresentate nel piano possiamo notare che:

- quando aumenta il valore della base la curva cresce (nel semipiano delle x > 0) e decresce (nel semipiano delle x < 0) sempre più rapidamente;
- tutte le curve passano per il punto (1,1);
- tutte le curve sono positive.

6.2.2. *Caso* $a = 1$

Se al diminuire della base a la curva cresce sempre meno rapidamente, continuando a passare per il punto (1,1) è logico pensare che ad un certo punto la funzione diventerà una retta passante per il punto (1,1). Infatti, per $a = 1$ la funzione diventa una retta in quanto 1 elevato a n fa sempre 1:

$$y = 1^x = 1$$

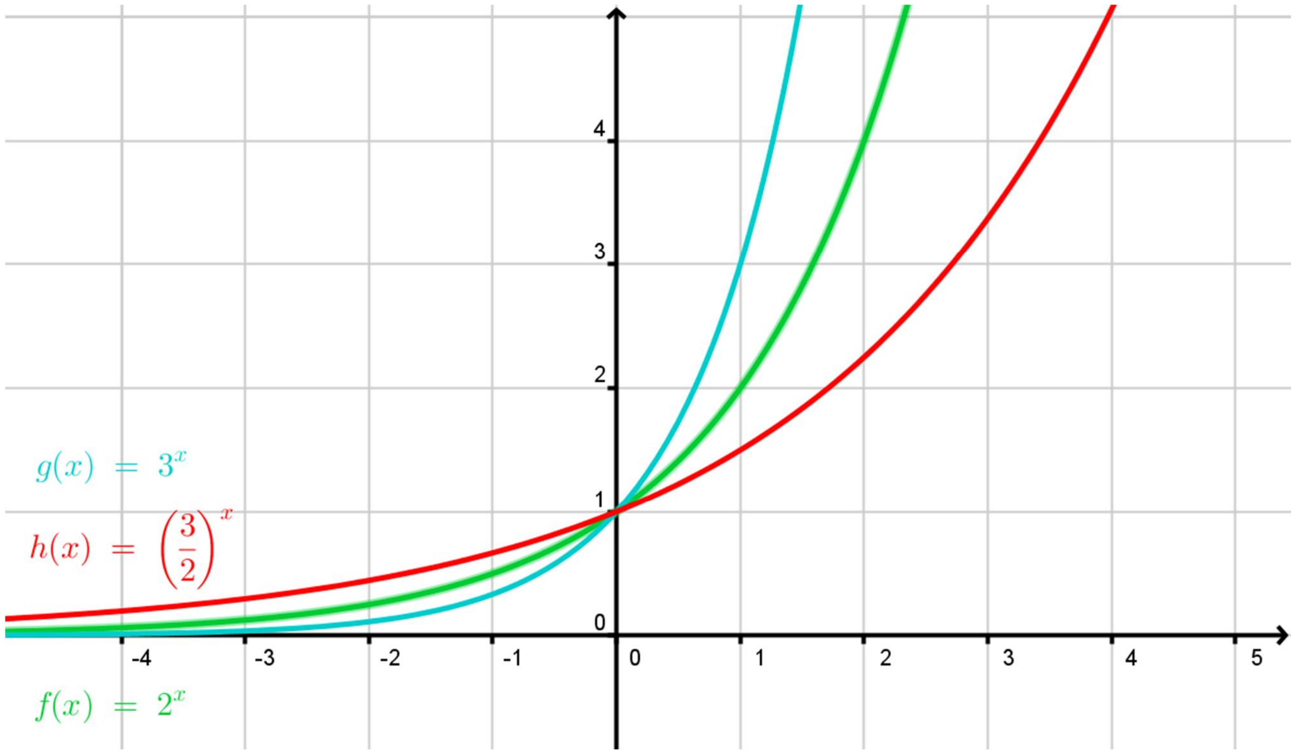


6.2.3. *Caso* $a < 1$

Se la base è minore di 1 significa che può essere scritta sotto forma di frazione, ad esempio:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Il grafico di una funzione esponenziale a base minore di 1 è la curva simmetrica rispetto all'asse y della funzione esponenziale con base maggiore di 1:



Osservando le tre funzioni rappresentate nel piano possiamo notare che:

- quando diminuisce il valore della base, la curva cresce (nel semipiano delle x < 0) e decresce (nel semipiano delle x > 0) sempre più rapidamente;
- tutte le curve passano per il punto (1,1);
- tutte le curve sono positive.

5.3. *La funzione logaritmica*

La funzione logaritmica è la funzione inversa dell'esponenziale:

$$y = a^x \quad \rightarrow \quad x = \log_a y$$

Quella che nell'esponenziale era la variabile indipendente ora è diventata la variabile dipendente;

la base dell'esponenziale stabilisce con quale tipo di logaritmo abbiamo a che fare.

La scrittura:

$$y = \log_a x$$

si legge: logaritmo in base a in x.

Il logaritmo può avere per base un numero:

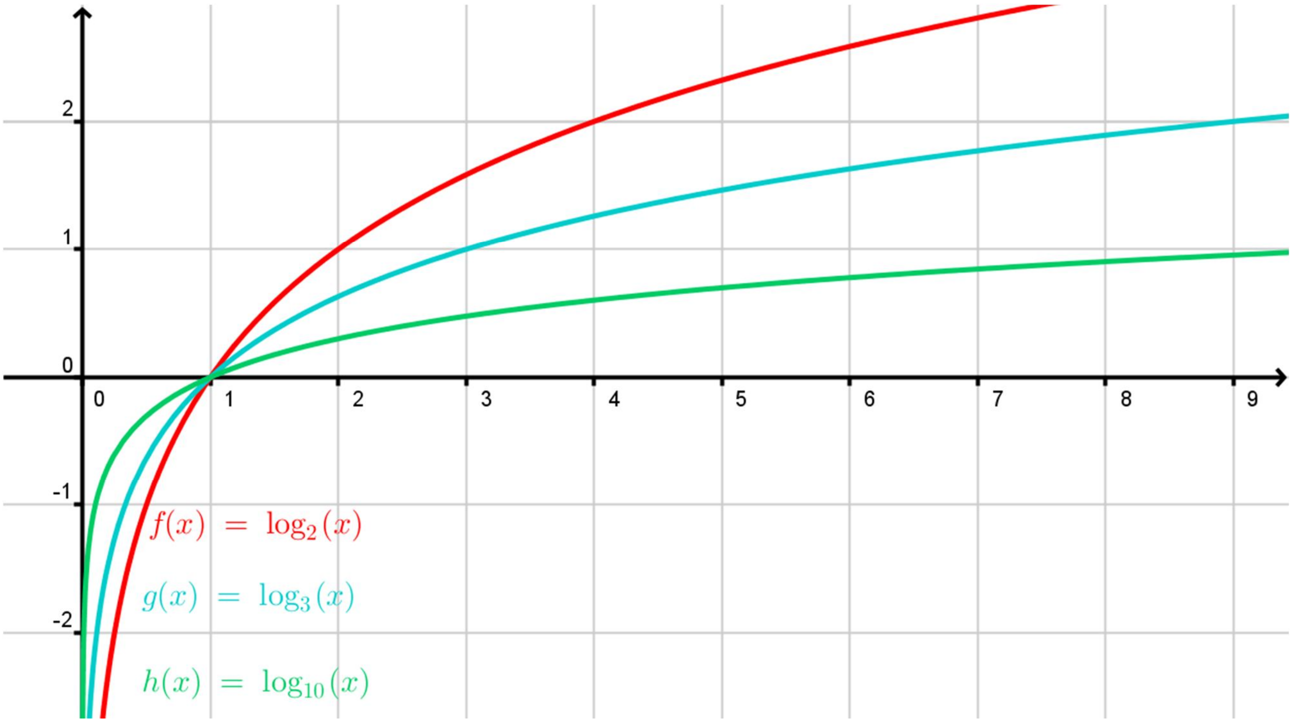
- maggiore di 1
- minore di 1

La base non può essere pari a 1 perché in quel caso l'esponenziale si riduce ad una retta di equazione y = 1 che non può essere invertita in quanto non esiste più la variabile indipendente.

Analizziamo i due casi:

6.3.1. *caso* $a > 1$

Osserviamo il grafico seguente:



Risulta che:

- All'aumentare della base la curva si schiaccia sempre di più sull'asse delle x.
- Tutte le curve passano per il punto (1,0)
- La curva esiste solo nel semipiano delle x positive.

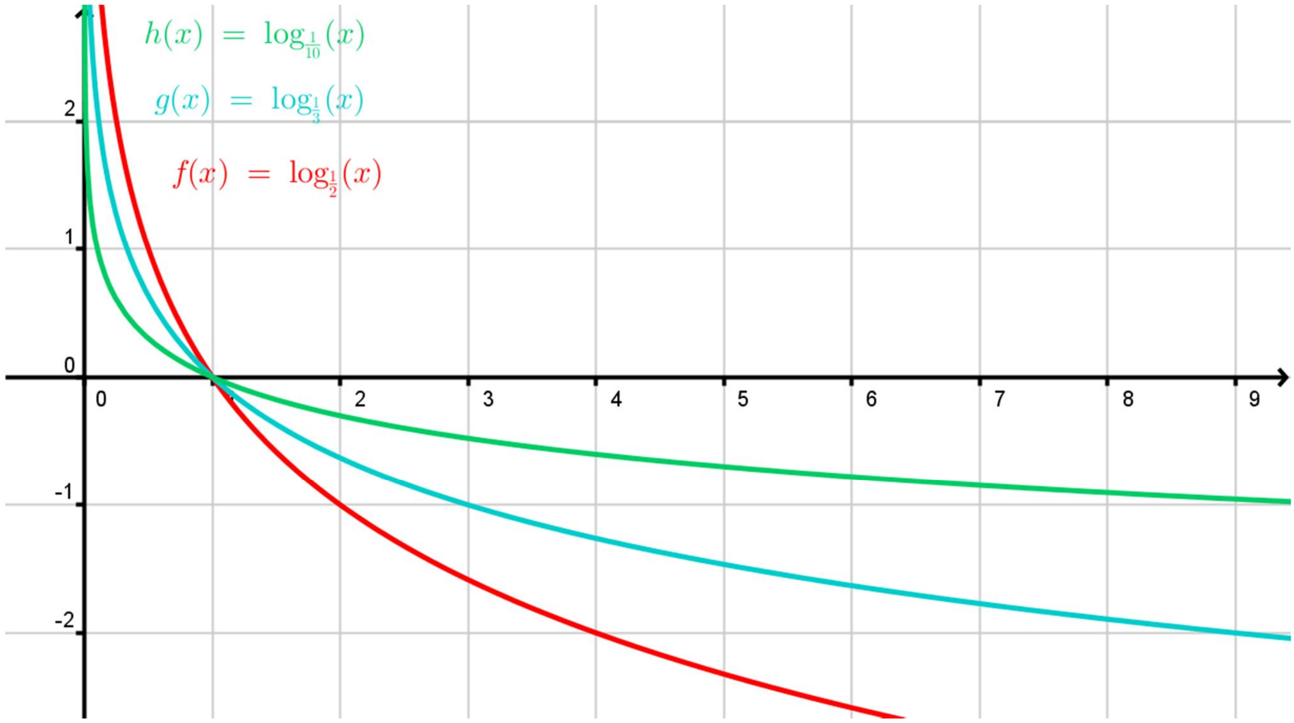
6.3.2. *Caso* $a < 1$

Osserviamo il grafico delle funzioni seguenti:

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$y = \log_{\frac{1}{3}} x$$

$$y = \log_{\frac{1}{10}} x$$



Dal grafico risulta che:

- Al diminuire della base la funzione si schiaccia sempre di più sull'asse delle x.
- Tutte le curve passano per il punto (1,0)
- La curva esiste solo nel semipiano delle x positive.

Riassumendo, **IL LOGARITMO ESISTE SOLO SE L'ARGOMENTO X È POSITIVO. E' NECESSARIO TENERE IN CONTO QUESTA COSA QUANDO SI RISOLVONO DELLE EQUAZIONI LOGARITMICHE.**

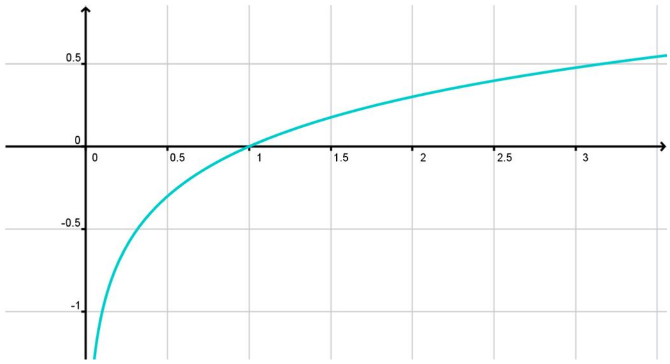
6.3.3. *Due funzioni particolari*

Due funzioni logaritmiche particolari sono quelle in cui la base è 10 e in cui la base è il numero e, chiamato numero di Nepero.

Logaritmo in base 10

Il logaritmo in base 10 rientra nella categoria nei logaritmi con base maggiore di 1. E' un logaritmo importante perché la sua funzione inversa, l'esponenziale, è particolarmente utilizzata:

$$y = \log_{10} x \quad \rightarrow \quad x = 10^{y}$$



Nel seguito il logaritmo in base 10 si indicherà con la scritta $\log x$ anziché $\log_{10} x$, sottoindentendo che se la base non è indicata stiamo considerando che sia 10.

Logaritmo naturale (in base e)

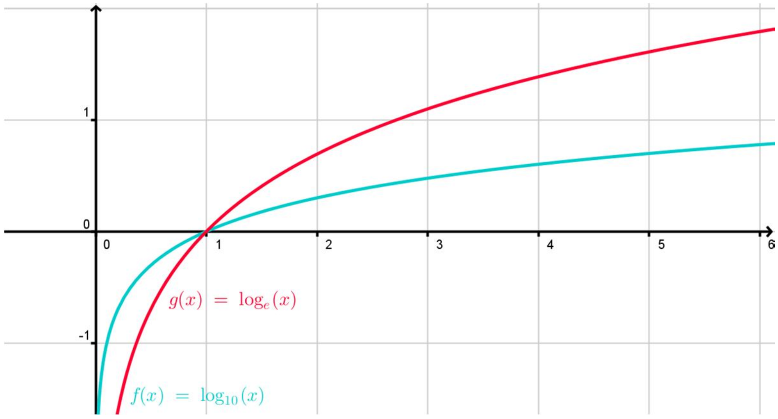
Il logaritmo naturale è il logaritmo in base e, dove $e = 2{,}71828$, chiamato numero di **NEPERO**.

E' un numero irrazionale e quindi, al pari di π, non è esprimibile con una frazione o con un numero finito di cifre.

Il logaritmo in base e, o logaritmo naturale si indica con $\ln x$. La sua funzione inversa, l'esponenziale, è particolarmente utilizzata:

$$y = \ln x \quad \rightarrow \quad x = e^y$$

Il suo grafico è il seguente:



6.3.4. *Le proprietà dei logaritmi*

I logaritmi godono di 4 proprietà:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Quest'ultima proprietà si chiama anche **FORMULA DEL CAMBIO DI BASE** perché consente di convertire un logaritmo in una base nel logaritmo in un'altra base.

5.4. *Il calcolo dei logaritmi con la calcolatrice*

Per calcolare i logaritmi si può utilizzare una calcolatrice scientifica.

Tutte le calcolatrici consentono il calcolo del logaritmo naturale e del logaritmo in base 10.

Quelle più potenti consentono di calcolare il logaritmo di una base qualunque, specificabile dall'utente.

5.5. *Il passaggio da esponenziale a logaritmo*

Abbiamo visto che le funzioni trigonometriche hanno ognuna una funzione inversa che consente di togliere l'argomento dall'interno della funzione.
L'esponenziale e il logaritmo, a differenza delle funzioni trigonometriche, non hanno una propria funzione inversa, ma l'uno fa da inversa all'altro: l'esponenziale è la funzione inversa del logaritmo e il logaritmo è la funzione inversa dell'esponenziale. Bisogna però usare un esponenziale o un logaritmo che abbia la stessa base.
Il metodo da utilizzare per passare dall'uno all'altro è analogo a quello per calcolare le funzioni inverse trigonometriche: quello che era l'argomento deve diventare il risultato e quello che era il risultato deve diventare l'argomento:

$$3^x = 8 \quad \rightarrow \quad x = \log_3 8$$

$$\log_2 x = 5 \quad \rightarrow \quad x = 2^5$$

6.EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Un'equazione esponenziale è un'equazione in cui l'incognita compare all'esponente. Nella sua forma elementare si presenta come:

$$a^x = b$$

Per risolvere un'equazione esponenziale è necessario ricordare due cose:

- Le funzioni esponenziali sono trascendenti e quindi non è possibile eseguire delle operazioni direttamente sull'argomento. Quindi l'unico modo per esplicitare l'argomento di una funzione esponenziale è usare la sua funzione inversa, cioè il logaritmo.

$$y = a^x \quad \rightarrow \quad x = \log_a y$$

- Quando si ha a che fare con una potenza, non è possibile svolgere tutte le operazioni; sono consentite solo alcune operazioni, definite dalle proprietà delle potenze.

Come per le equazioni trigonometriche, anche per le esponenziali è necessario per prima cosa riconoscere il tipo di equazione e poi utilizzare il metodo corretto.

6.1. *Identificare un'equazione esponenziale*

Le equazioni esponenziali si possono classificare come segue:

- Elementari: c'è una sola funzione esponenziale.
- Stessa base: ci sono solo due funzioni con la stessa base
- Diverse basi: ci sono due funzioni esponenziali con basi diverse.

6.2. *Risolvere le equazioni esponenziali*

Dopo aver capito a quale categoria appartiene l'equazione, è necessario seguire un procedimento risolutivo.

7.2.1. *Equazione elementare*

Quando si ha un'equazione con una sola funzione esponenziale, cioè la x compare all'esponente di numeri uguali, si pone la funzione esponenziale di base uguale a t.

Per identificare la funzione di base sono necessarie alcune considerazioni.

Nella seguente equazione:

$$3^{2x} + 3 = 0$$

la funzione di base è 3^{2x} perché non c'è un'altra funzione esponenziale.

Se però abbiamo un'equazione come quella seguente:

$$3^{2x} + 3^{x} = 0$$

Non possiamo prendere 3^{2x} come funzione base perché c'è un secondo esponenziale: 3^{x}.

E' quindi necessario fare prima alcune considerazioni. Riscriviamo l'equazione come:

$$(3^{x})^{2} + 3^{x} = 0$$

Ora è evidente che la funzione esponenziale da porre uguale a t è 3^{x}.

Una volta fatta questa operazione, ci troviamo di fronte un'equazione algebrica in t che, una volta risolta, ci da come risultati $t_1 = a$, $t_2 = b$, ecc...

Bisogna quindi ritornare alla variabile originale, allo stesso modo delle equazioni trigonometriche.

Si ottengono quindi equazioni del tipo:

$$a^{f(x)} = b$$

In cui bisogna calcolare la x utilizzando il logaritmo:

$$a^{f(x)} = b \quad \rightarrow \quad f(x) = \log_a b$$

Se nell'equazione è presente una sola funzione esponenziale non è necessario fare tutta questa procedura e si può usare subito la formula inversa.

Un esempio di questo tipo di equazione è:

$$2^{x+1} = 8 \quad \rightarrow \quad x + 1 = \log_2 8 \quad \rightarrow \quad x + 1 = 3 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

7.2.2. *Equazione con due funzioni esponenziali con stessa base*

Qualora le funzioni esponenziali non avessero già la stessa base è necessario ricondurre la funzione alla stessa base usando le proprietà delle potenze.

Ad esempio:

$$4^{x} = 2^{x+1} \quad \rightarrow \quad (2^{2})^{x} = 2^{x+1} \quad \rightarrow \quad 2^{2x} = 2^{x+1}$$

Questo punto si uguagliano i due argomenti:

$$a^{f(x)} = a^{h(x)} \quad \rightarrow \quad f(x) = h(x)$$

7.2.3. *Equazione con basi diverse*

Qualora le due funzioni esponenziali non siano riconducibili alla stessa base è necessario usare un altro metodo: bisogna passare tutto al logaritmo, utilizzando una base che sia comoda per il calcoli.

Bisogna ricordare una cosa importante: è possibile fare tutte le operazioni che vogliamo basta che le facciamo su entrambi i membri. E devono essere tutto il primo membro e tutto il secondo membro a subire l'operazione.

Ad esempio, consideriamo un'equazione del tipo:

$$f(x) = h(x) + g(x)$$

E' corretto scrivere:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{h(x) + g(x)}$$
$$(f(x))^2 = (h(x) + g(x))^2$$

Ma è sbagliato scrivere:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{g(x)}$$
$$f(x)^2 = h(x)^2 + g(x)^2$$

Dunque, in un equazione con due funzioni esponenziali diverse, non riconducibili alla stessa base, si passa al logaritmo tutto il primo membro e tutto il secondo membro.

Vediamo un esempio:

$$2^x = 3^{x+1} \quad \rightarrow \quad \ln 2^x = \ln 3^{x+1}$$

Sfruttando la proprietà dei logaritmi che consente di togliere dall'argomento l'esponente, si ottiene:

$$\ln 2^x = \ln 3^{x+1} \quad \rightarrow \quad x \ln 2 = (x+1) \ln 3 \quad \rightarrow \quad x = \frac{\ln 3}{\ln 2 - \ln 3}$$

6.3. *Le disequazioni esponenziali*

Una disequazione esponenziale si identifica come le equazioni. Si può quindi usare lo stesso schema di prima.

Per risolvere una disequazione esponenziale bisogna però fare due considerazioni:

quando la base dell'esponenziale è minore di 1 è necessario cambiare il segno della disequazione.

è necessario che l'argomento venga scritto al primo membro.

Ad esempio:

$$2^x > 3$$

Si risolve in questo modo:

$$x > \log_2 3$$

Se invece la base è minore di 1:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 3$$

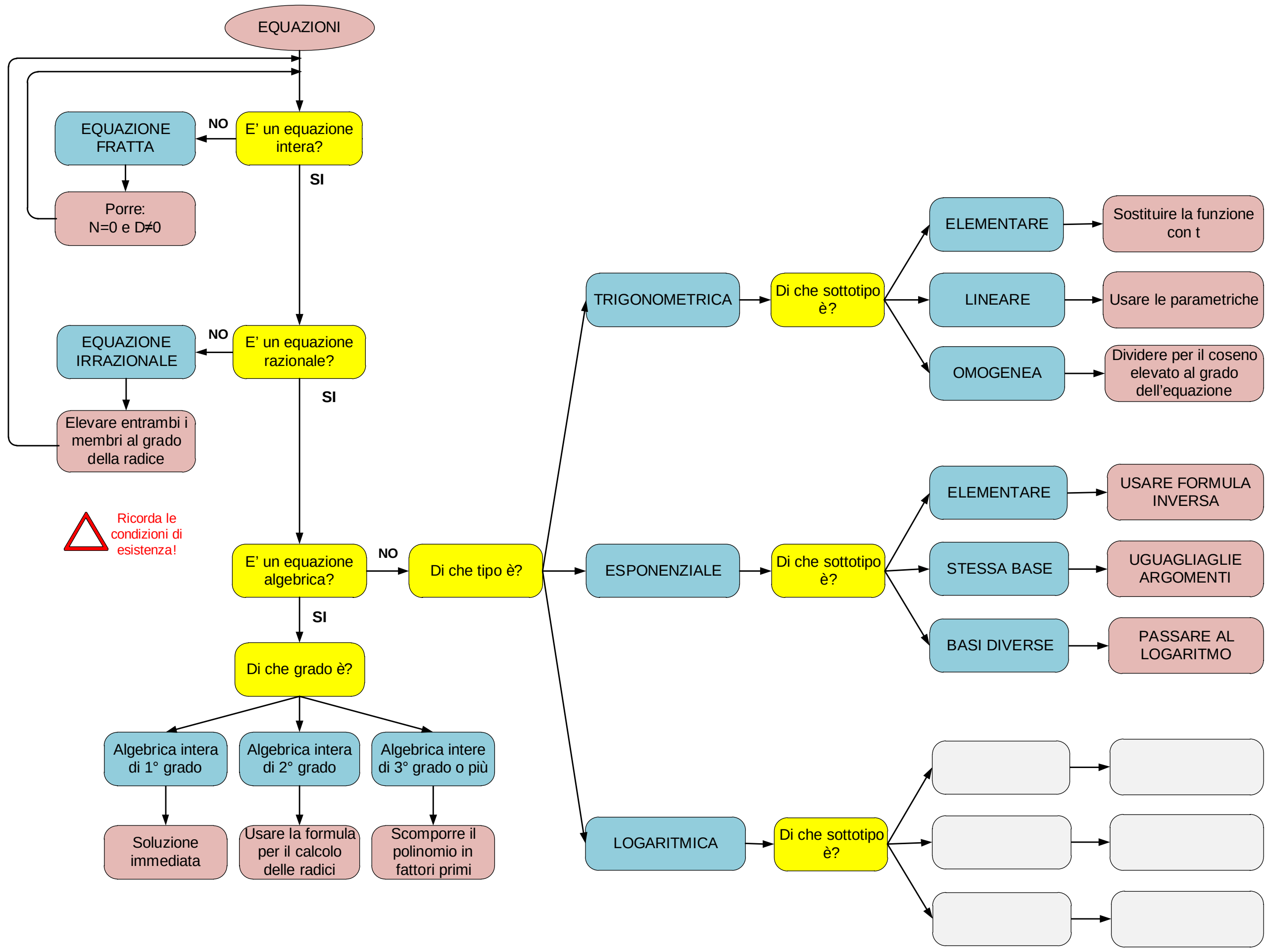
Si risolve in questo modo:

$$x < \log_{\frac{1}{2}} 3$$

Per il resto i metodi risolutivi sono gli stessi delle equazioni.

Capiremo quando studieremo analisi come mai è necessario cambiare il segno della disequazione.

Possiamo quindi completare un'altra parte dello schema che abbiamo visto nel capitolo delle equazioni trigonometriche:


EQUAZIONI
E' un equazione intera?
NO
EQUAZIONE FRATTA
Porre: N=0 e D≠0
SI
E' un equazione razionale?
NO
EQUAZIONE IRRAZIONALE
Elevare entrambi i membri al grado della radice
SI
Ricorda le condizioni di esistenza!
E' un equazione algebrica?
NO
Di che tipo è?
SI
Di che grado è?
Algebrica intera di 1° grado
Algebrica intera di 2° grado
Algebrica intere di 3° grado o più
Soluzione immediata
Usare la formula per il calcolo delle radici
Scomporre il polinomio in fattori primi
TRIGONOMETRICA
Di che sottotipo è?
ELEMENTARE
Sostituire la funzione con t
LINEARE
Usare le parametriche
OMOGENEA
Dividere per il coseno elevato al grado dell'equazione
ESPONENZIALE
Di che sottotipo è?
ELEMENTARE
USARE FORMULA INVERSA
STESSA BASE
UGUAGLIAGLIE ARGOMENTI
BASI DIVERSE
PASSARE AL LOGARITMO
LOGARITMICA
Di che sottotipo è?

7.EQUAZIONI E DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

Un'equazione logaritmica ha l'incognita che compare all'interno dell'argomento del logaritmo. Nella sua forma elementare si presenta come:

$$\log_a x = b$$

Anche le funzioni logaritmiche sono trascendenti e quindi non è possibile eseguire delle operazioni direttamente sull'argomento.

L'unico modo per esplicitare l'argomento di una funzione logaritmica è usare la sua funzione inversa, cioè l'esponenziale.

$$y = \log_a x \quad \rightarrow \quad x = a^y$$

E' anche necessario ricordare che quando si ha a che fare con un logaritmo, non è possibile svolgere tutte le operazioni; sono consentite solo alcune operazioni, definite dalle proprietà dei logaritmi.

Infine il logaritmo esiste solo se l'argomento è positivo: bisogna sempre imporre le condizioni di esistenza, cioè che l'argomento (quello che c'è dentro al logaritmo) sia positivo!

7.1. *Riconoscere le equazioni logaritmiche*

Le equazioni logaritmiche si possono classificare in tre categorie:

- Elementare, in cui c'è una sola funzione logaritmica uguagliata ad una costante
- Quelle in cui ci sono due logaritmi con la stessa base
- Quelle in cui ci sono logaritmi con basi diverse

7.2. *Risolvere le equazioni logaritmiche*

Per risolvere le equazioni logaritmiche è necessario, per prima cosa, calcolare le condizioni di esistenza. Se ci sono più logaritmi le condizioni devono essere verificate tutte contemporaneamente: bisogna, cioè, fare l'intersezione degli intervalli che verificano i singoli logaritmi.

Ad esempio, nella seguente equazione logaritmica sono presenti due logaritmi:

$$\log_2(\mathbf{1} - \boldsymbol{x}) + \log_3(\boldsymbol{x} + \mathbf{5}) = 0$$

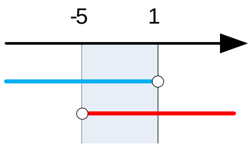
Le condizioni di esistenza sono:

$$\begin{cases} \mathbf{1} - \boldsymbol{x} > \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x} + \mathbf{5} > \mathbf{0} \end{cases}$$

Risolvendo si ottiene:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} < \mathbf{1} \\ \boldsymbol{x} > -\mathbf{5} \end{cases}$$

Bisogna quindi fare l'intersezione tra questi due intervalli:



Quindi il campo di esistenza di questa equazione è:

$$-5 < x < 1$$

8.2.1. *Equazione logaritmica elementare*

Quando si ha un'equazione con una sola funzione logaritmica, si pone la funzione logaritmica di base uguale a t.

Come abbiamo fatto per le equazioni esponenziali elementari, anche per le logaritmiche è necessario fare qualche considerazione preliminare:

Nella seguente equazione:

$$3\log^2 x + \log x = 0$$

la funzione di base è $\log x$.

Infatti, la scrittura:

$$log^2 x$$

indica un logaritmo elevato al quadrato. Attenzione: tutto il logaritmo è elevato al quadrato non solo l'argomento!

Quindi l'equazione precedente si può scrivere come:

$$3t^2 + t = 0$$

Ci troviamo quindi di fronte ad un'equazione algebrica in t che, una volta risolta, ci da come risultati $t_1 = a$, $t_2 = b$, ecc…

Bisogna quindi ritornare alla variabile originale, allo stesso modo delle equazioni trigonometriche.

Si ottengono cioè equazioni del tipo:

$$\log_a f(x) = b$$

In cui bisogna calcolare la x utilizzando l'esponenziale:

$$\log_a f(x) = b \quad \rightarrow \quad f(x) = a^b$$

Se nell'equazione è presente una sola funzione logaritmica non è necessario fare tutta questa procedura e si può usare subito la formula inversa.

Un esempio di questo tipo di equazione è:

$$\log_2(x - 2) = 3$$

Questa equazione si presenta in forma elementare.

Il campo di esistenza è: $x > 2$

La soluzione dell'equazione è:

$$x - 2 = 2^3 \quad \rightarrow \quad x = 8 + 2 = 10$$

Confrontiamo il risultato con le condizioni di esistenza. 20 è maggiore di 2, quindi il risultato è accettabile.

8.2.2. ***Equazione con più logaritmi della stessa base***

Quando ci sono logaritmi con la stessa base è necessario usare le proprietà dei logaritmi per scrivere l'equazione in modo da avere due sole funzioni del tipo:

$$\log_a f(x) = \log_a h(x)$$

In questo caso diventa:

$$f(x) = h(x)$$

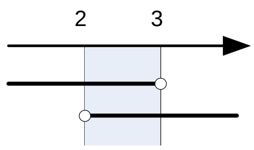
Ad esempio:

$$\log_2(x-3) - \log_2(2-x) = 0$$

Questa equazione contiene due logaritmi.

$$\begin{cases} x-3>0 & \rightarrow \quad x>3 \\ 2-x>0 & \rightarrow \quad x<2 \end{cases}$$

Il campo di esistenza è:



Il campo di esistenza è $2 < x < 3$.

Per ricondurre l'equazione alla forma base spostiamo uno dei logaritmi dall'altro lato dell'equazione:

$$\log_2(x-3) = \log_2(2-x)$$

Ora possiamo risolvere usando al funzione inversa:

$$x-3 = 2-x$$

Cioè:

$$2x = 5 \qquad x = \frac{5}{2}$$

Verifichiamo che la soluzione sia contenuta nel campo di esistenza

8.2.3. ***Equazioni con più logaritmi di basi diverse***

Il caso più complicato è quello in cui sono presenti nella stessa equazione due logaritmi con basi diverse In questo caso è necessario usare la formula per il cambio di base:

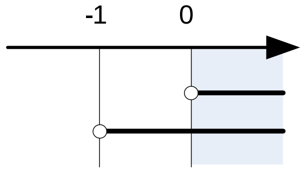
$$\log_a b \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

<u>Esempio</u>:

$$\log_3 x - \log_2(x+1) = 1$$

Il campo di esistenza è:

$$\begin{cases} x > 0 & \rightarrow \quad x > 0 \\ x + 1 > 0 & \rightarrow \quad x > -1 \end{cases}$$



L'intersezione è: $x > 0$

Ora si riconducono i logaritmi alla stessa base. Possiamo utilizzare qualunque base per il logaritmo, ma se scegliamo una base che è già presente nell'equazione ci semplifichiamo i calcoli. Infatti:

$$\log_a a = 1$$

Scegliamo, ad esempio, la base 2:

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 3} - \frac{\log_2(x+1)}{\log_2 2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\log_2 x}{\log_2 3} - \frac{\log_2(x+1)}{1} = 1$$

Per ricondurre l'equazione alla forma elementare facciamo il minimo comune multiplo e portiamo il denominatore al secondo membro (possiamo faro perché è solo un numero):

$$\log_2 x - \log_2(x+1) \cdot \log_2 3 = \log_2 3$$

$$\ln x\,(\ln 2 - \ln 3) = \ln 3 \cdot \ln 2 - \ln 3 \quad \rightarrow \quad \ln x = \frac{\ln 3 \cdot \ln 2 - \ln 3}{\ln 2 - \ln 3}$$

Con una calcolatrice si può calcolare il valore dei logaritmi, ma il risultato sarà approssimato poiché si tratta di un numero irrazionale. E' quindi opportuno lasciare espresso il risultato sotto forma di logaritmo e, qualora sia necessario indicarne il valore, utilizzare il segno di "circa uguale":

$$\ln x \cong 0{,}83$$

A questo punto è possibile utilizzare la funzione inversa:

$$x \cong e^{0{,}83} = 2{,}29$$

Che è accettabile, essendo maggiore di 1.

7.3. *Le disequazioni logaritmiche*

Una disequazione logaritmica si identifica come le equazioni. Si può quindi usare lo stesso schema di risoluzione.

Per risolvere una disequazione logaritmica bisogna però fare due considerazioni:

- Se la base è minore di 1 è necessario cambiare il segno della disequazione; inoltre l'argomento deve essere scritto al primo membro:

$$\log_{\frac{1}{2}} x > 2$$

Si risolve in questo modo:

$$x < \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

- Quando invece la base del logaritmo è maggiore di 1 NON è necessario cambiare il segno della disequazione. E' però necessario che l'argomento venga scritto al primo membro.

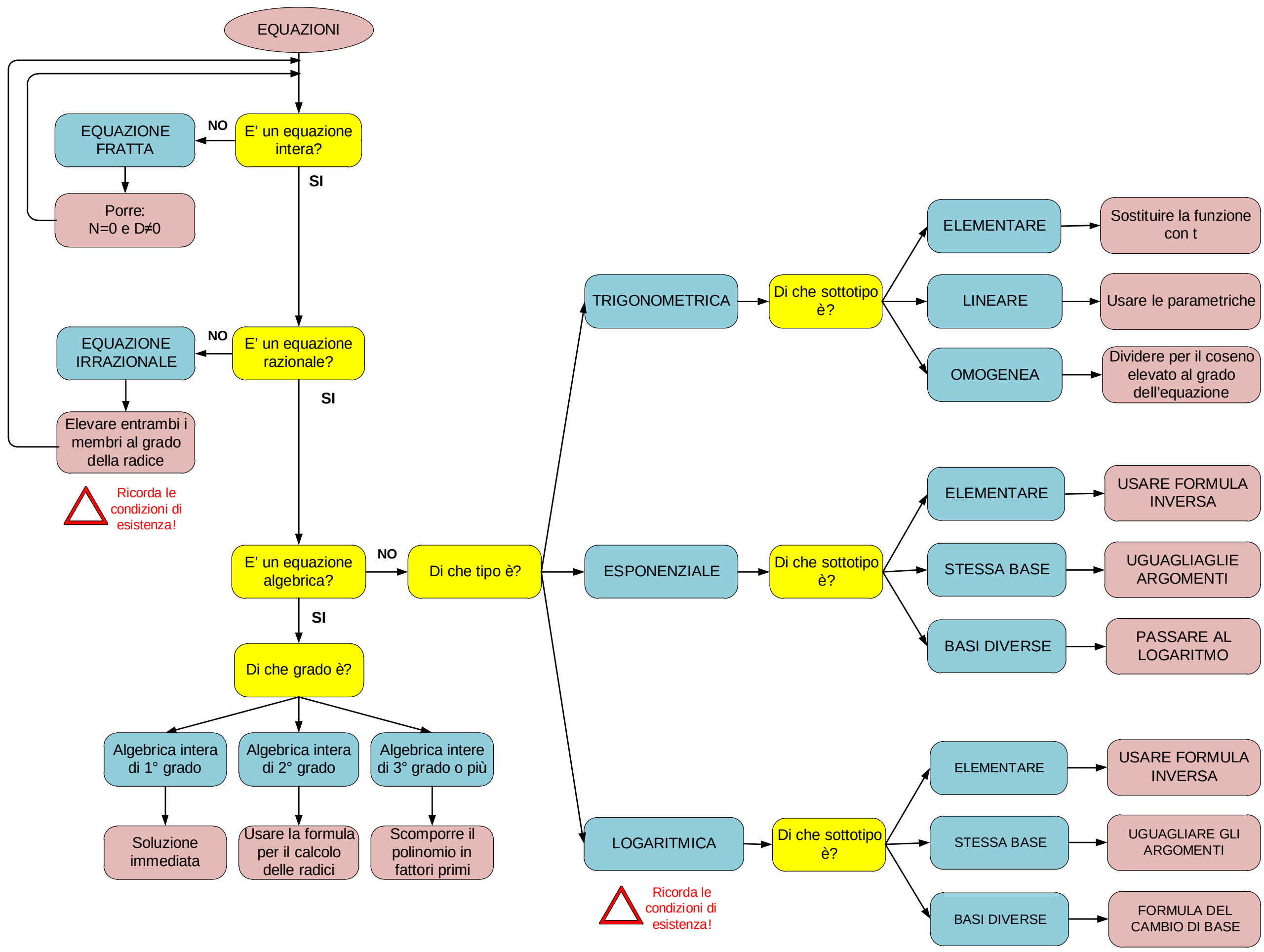
  Ad esempio:

$$\log_2 x > 2$$

  Si risolve in questo modo:

$$x > (2)^2 \quad \rightarrow \quad x > 4$$

Per il resto i metodi risolutivi sono gli stessi delle equazioni.



Sommario