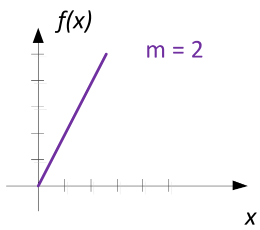
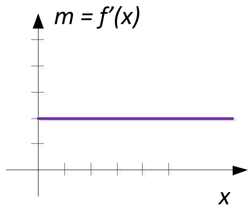
MAPPE DI MATEMATICA PER IL 5° ANNO

- Il calcolo delle derivate
- Le discontinuità
- Applicazioni delle derivate
- Lo studio di funzione completo
- Problemi di massimo e minimo
- Integrali notevoli
- Integrali per parti e razionali
- Il disegno delle funzioni
- Integrali definiti
- Le equazioni differenziali
- Vettori e segmenti nel piano cartesiano

LE DERIVATE





sono

Funzioni che si ottengono da altre funzioni (chiamate PRIMITIVE) tramite un processo di DERIVAZIONE

rappresentano

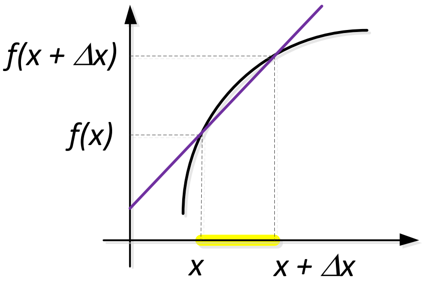
i coefficienti angolari delle rette tangenti alla primitiva nelle corrispondenti ascisse

si trovano

CON LA DEFINIZIONE ANALITICA	CON LE FORMULE DI CALCOLO

Calcolando il limite del rapporto incrementale per Δx che tende a zero

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



DERIVATE DELLE FUNZIONI BASE

$f(x) = k \longrightarrow f'(x) = 0$

$f(x) = x^N \longrightarrow f'(x) = N \cdot x^{N-1}$

$f(x) = \sin(x) \longrightarrow f'(x) = \cos(x)$

$f(x) = \cos(x) \longrightarrow f'(x) = -\sin(x)$

$f(x) = \log_a(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e$

$f(x) = a^x \longrightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$

DERIVATE DEGLI ARCHI

$f(x) = \arctan(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$f(x) = \arcsin(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) = \arccos(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

OPERAZIONI CON LE DERIVATE

$D[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x)$

$D[f(x) \pm h(x)] = f'(x) \pm h'(x)$

$D[f(x) \cdot h(x)] = f'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot h'(x)$

$$D\left[\frac{n(x)}{d(x)}\right] = \frac{n'(x) \cdot d(x) - n(x) \cdot d'(x)}{[d(x)]^2}$$

$D[f(h(x))] = f'(h(x)) \cdot D[h'(x)]$

$$D\left[f(x)^{h(x)}\right] = [f(x)]^{h(x)} \cdot \left[h'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{h(x) \cdot f'(x)}{f(x)}\right]$$

$$D[f^{-1}(x)] = \frac{1}{f'(x)}$$

$$D\left[\frac{1}{f(x)}\right] = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

LE DISCONTINUITA'

possono essere

DISCONTINUITA' DELLA FUNZIONE

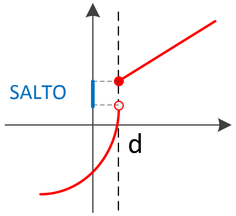
si cercano

Nei punti in cui il dominio della funzione si interrompe

DISCONTINUITA' DI PRIMA SPECIE: SALTO

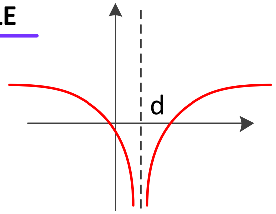
$$\lim_{x\to d^+} f(x) = L_1$$
$$\lim_{x\to d^-} f(x) = L_2$$

$$L_1 \neq L_2$$



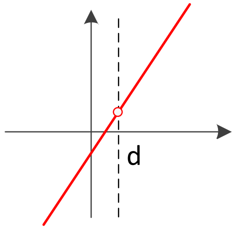
DISCONTINUITA' DI SECONDA SPECIE: ASINTOTO VERTICALE

$$\lim_{x\to d^+} f(x) = \pm\infty$$
$$\lim_{x\to d^-} f(x) = \pm\infty$$



DISCONTINUITA' DI TERZA SPECIE: ELIMINABILE

$$\lim_{x\to d^+} f(x) = \lim_{x\to d^-} f(x) = L$$



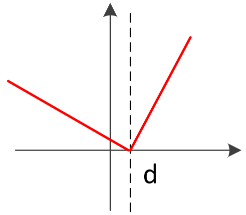
DISCONTINUITA' DELLA DERIVATA

si cercano

Nei punti in cui il dominio della derivata si interrompe

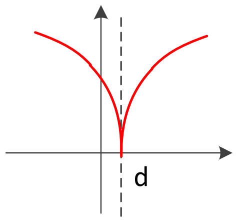
PUNTO ANGOLOSO

$$\lim_{x\to d^+} f'(x) = L_1$$
$$\lim_{x\to d^-} f'(x) = L_2$$



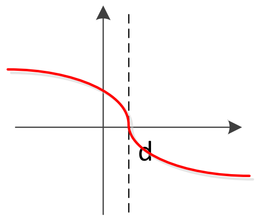
CUSPIDE

$$\lim_{x\to d^+} f'(x) = \pm\infty$$
$$\lim_{x\to d^-} f'(x) = \mp\infty$$



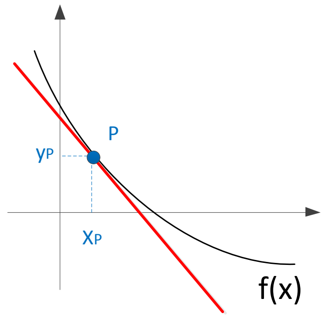
FLESSO A TANGENTE VERTICALE

$$\lim_{x\to d^+} f'(x) = \lim_{x\to d^-} f'(x) = \pm\infty$$



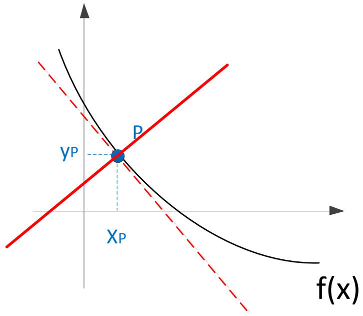
APPLICAZIONI DELLE DERIVATE

RETTA TANGENTE



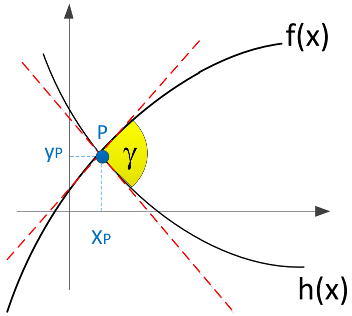
$$y = f'(x_P)x + y_P - f'(x_P) \cdot x_P$$

RETTA NORMALE



$$y = \frac{-1}{f'(x_P)}x + y_P + \frac{1}{f'(x_P)} \cdot x_P$$

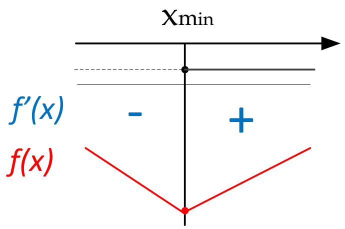
ANGOLO TRA DUE CURVE



P = PUNTO DI INTERSEZIONE TRA f(x) e h(x)

$$\gamma = \arctan \left| \frac{f'(x_P) - h'(x_P)}{1 + f'(x_P) \cdot h'(x_P)} \right|$$

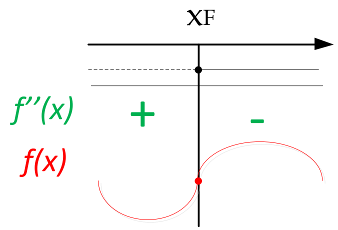
MONOTONIA



SE f'(x) = 0 ALLORA f(x) può avere:

- PUNTO DI MASSIMO
- PUNTO DI MINIMO
- FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE

FLESSI E CONCAVITA'



SE f''(x) = 0 ALLORA f(x) può avere:

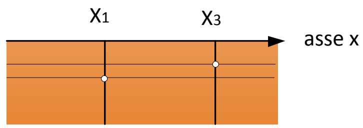
- FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE
- FLESSO A TANGENTE OBLIQUA

PROBLEMI DI MASSIMO E MINIMO

STUDIO DI FUNZIONE y = f(x)

DOMINIO → In quale parte dell'asse x la funzione esiste?

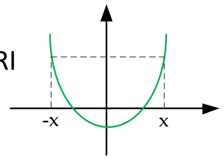
$$\begin{cases} \text{denominatore} \neq 0 \\ \text{radicando} \geq 0 \\ \text{argomento del logaritmo} > 0 \\ \text{argomento della tangente} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$



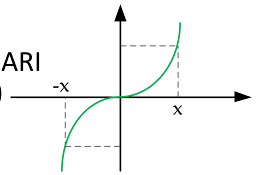
(-∞; x1) V (x1; +∞)

SIMMETRIE → La funzione è pari o dispari?

Funzione PARI
f(-x) = f(x)



Funzione DISPARI
f(-x) = -f(x)



INTERSEZIONI → La funzione interseca i due assi?

Intersezioni con l'asse x

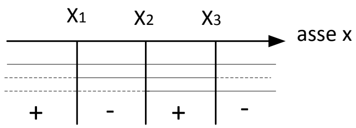
$$I_x = \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \quad f(x) = 0$$

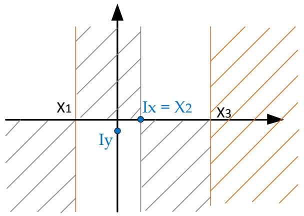
Intersezione con l'asse y (massimo 1)

$$I_y = \begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$$

SEGNO → In quali parti la funzione è positiva e in quali è negativa?

f(x) > 0





ASINTOTI → Ci sono rette a cui la funzione si avvicina senza mai toccarle?

ASINTOTI VERTICALI

Si cercano ai confini numerici del dominio
(-∞; x1) V (x1; +∞)

$$\lim_{x \to x_1^-} f(x) = ?$$

$$\lim_{x \to x_1^+} f(x) = ?$$

Se il risultato è ±∞ allora c'è un asintoto verticale di equazione:
$x = x_1$

ASINTOTI ORIZZONTALI

Si cercano all'infinito (se il campo di esistenza non è limitato
(-∞; x1) V (x1; +∞)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = k$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = k$$

Se il risultato è un numero k allora c'è un asintoto orizzontale di equazione:
$y = k$

ASINTOTI OBLIQUI

Si cercano solo se non ci sono asintoti orizzontali

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

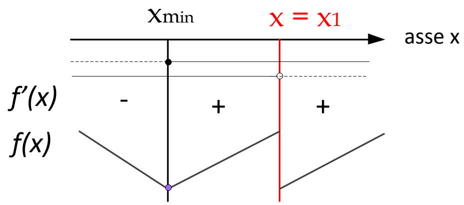
$$q = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$$

Se m risulta un numero finito diverso da zero, allora si calcola q e l'asintoto obliquo ha equazione:
$y = mx + q$

MONOTONIA → Per quali intervalli dell'asse x la funzione cresce/decresce?

Funzione primitiva: $y = f(x)$
Funzione derivata: $y' = f'(x)$

$$f'(x) \geq 0$$

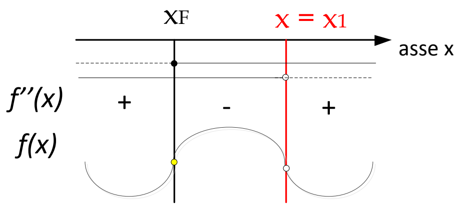


Pmin [xmin; f(xmin)]

CONCAVITA' → Per quali intervalli dell'asse x la funzione cresce/decresce?

Funzione primitiva: $y = f(x)$
Funzione derivata prima: $y' = f'(x)$
Funzione derivata seconda: $y'' = f''(x)$

$$f''(x) \geq 0$$

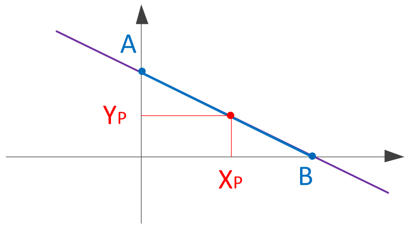


PF [xF; f(xF)]

PROBLEMI DI MASSIMO E MINIMO

Detti A e B i punti d'intersezione della retta $x + 2y - 4 = 0$ con gli assi cartesiani, determina sul segmento AB il punto P per il quale risulti massimo il prodotto delle coordinate

QUALI SONO I LIMITI GEOMETRICI DEL PROBLEMA?



A (0,2)
B (4,0)

Limiti geometrici del problema:
$0 < X_P < 4$

QUAL'E' LA GRANDEZZA DA RENDERE MASSIMA/MINIMA?

$$x_P \cdot y_P = MASSIMO$$

INDIVIDUARE LA FORMULA RISOLVENTE, SE NON E' DATA

$$y = x_P \cdot y_P$$

La grandezza da rendere massima o minima viene chiamata Y

SCRIVERE TUTTO IN FUNZIONE DI UNA SOLA VARIABILE

Variabile: x_P

$$y_P = \frac{4 - x_P}{2}$$

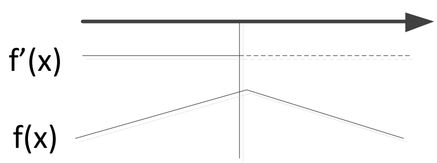
SCRITTURA DELLA FUNZIONE

$$y = x_P \cdot \frac{4 - x_P}{2}$$

DETERMINAZIONE DEI MASSIMI E DEI MINIMI

$$y = x \cdot \frac{4 - x}{2}$$

$y' = 2 - x$ $\qquad$ $2 - x > 0$ $\qquad$ $x > -2$



Il punto per cui è massimo il prodotto delle coordinate è $X_P = 2$

$$\int f'(x)dx = f(x)+c$$

$$\int a\,dx = ax+c$$

$$\int dx = x+c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c \quad \text{con } n \neq -1$$

$$\int \sqrt[n]{x}\,dx = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}+c$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+c$$

$$\int \operatorname{sen}x\,dx = -\cos x+c$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen}x+c$$

$$\int \frac{1}{senx}dx = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+c$$

$$\int \frac{1}{\cos x}dx = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+c$$

$$\int sen^2x\,dx = \frac{1}{2}(x-senx\cos x)+c$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x+senx\cos x)+c$$

$$\int \frac{1}{sen^2x}dx = -ctgx+c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsen\,x+c = -\arccos x+c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctg\,x+c$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+c$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(a^2 arcsen\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)+c$$

$$\int e^x\,dx = e^x+c$$

$$\int e^{kx}\,dx = \frac{e^{kx}}{k}+c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log_e a}+c$$

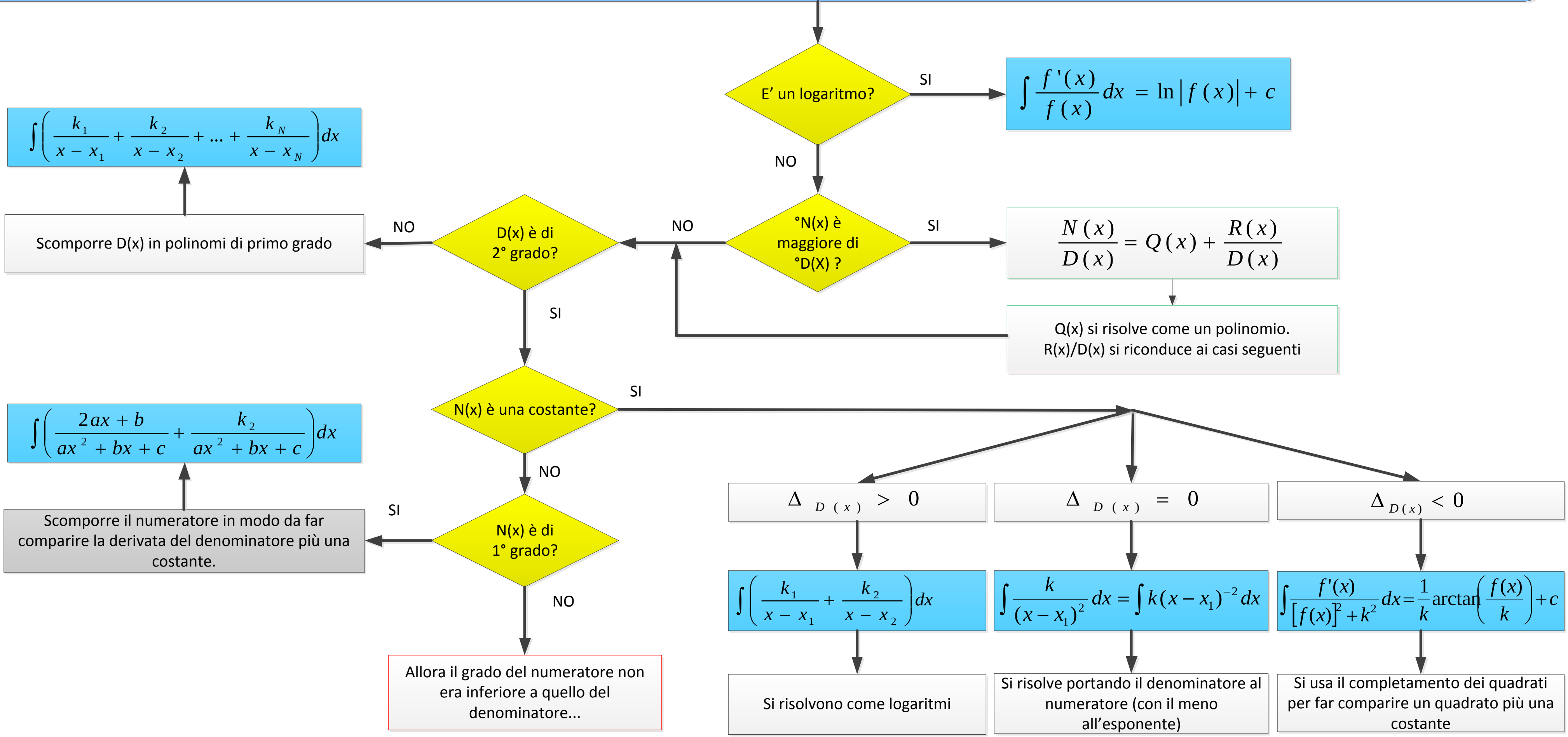
PRODOTTO DI DUE FUNZIONI (FORMULA PER PARTI)

$$\int f(x)\, g(x)\, d(x) = F(x)\, g(x) - \int F(x)\, g'(x)\, dx$$

$$\int f(x) \longrightarrow F(x)$$

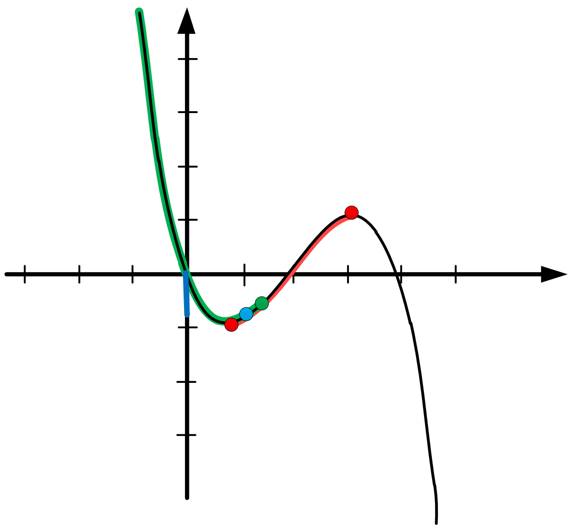
$$D[g(x)] \longrightarrow g'(x)$$

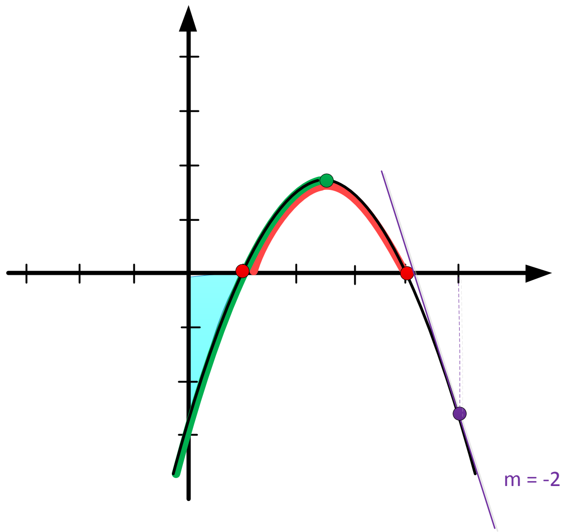
FUNZIONE FRATTA RAZIONALE

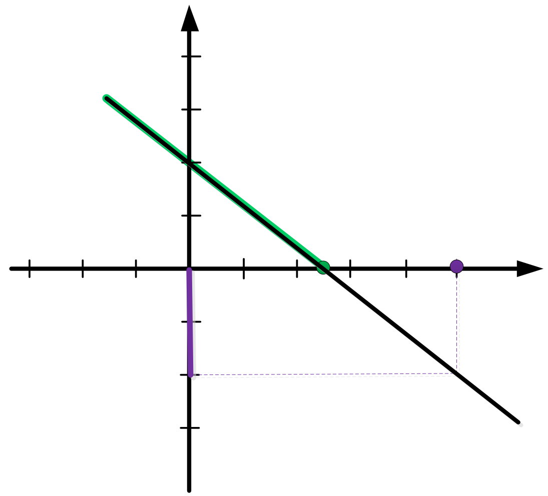


$F(x)$ **PRIMITIVA** $\xrightarrow{\text{derivazione}}$ $f(x)$ **FUNZIONE** $\xrightarrow{\text{derivazione}}$ $f'(x)$ **DERIVATA**

MASSIMI e MINIMI	ZERI	
FUNZIONE CRESCENTE	FUNZIONE POSITIVA	
FLESSI	MASSIMI e MINIMI	ZERI
CONCAVITA' POSITIVA	FUNZIONE CRESCENTE	FUNZIONE POSITIVA
ORDINATA DI X_P	AREA SOTTESA TRA 0 E X_P	
	m DELLA RETTA TANGENTE IN X_P	ORDINATA X_P

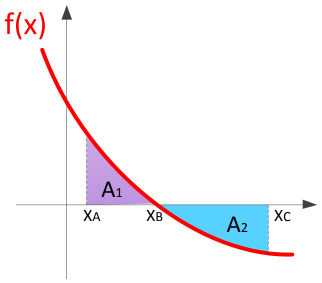






INTEGRALI DEFINITI

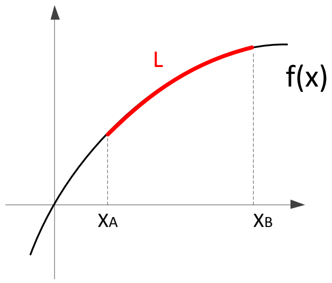
AREA SOTTESA



$$A_1 = \int_{x_A}^{x_B} f(x)dx$$

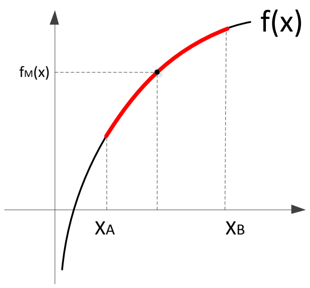
$$A_2 = -\int_{x_B}^{x_C} f(x)dx$$

LUNGHEZZA DELL’ARCO



$$L = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

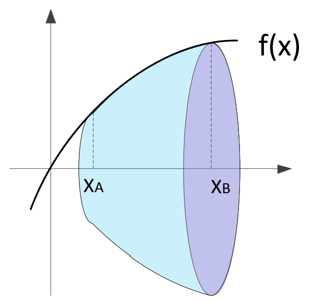
PUNTO MEDIO DI UN ARCO



$$f_M(x) = \frac{1}{x_B - x_A} \int_{x_A}^{x_B} f(x)dx$$

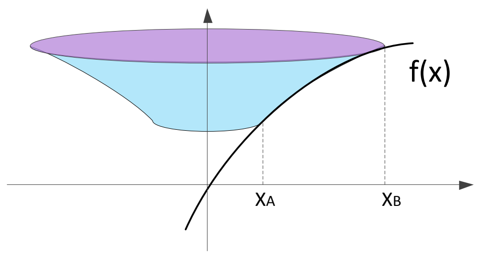
VOLUME DI UN SOLIDO DI ROTAZIONE

ROTAZIONE ATTORNO ALL’ASSE X



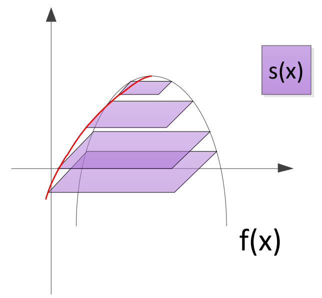
$$V_X = \pi \int_{x_A}^{x_B} [f(x)]^2\,dx$$

ROTAZIONE ATTORNO ALL’ASSE Y



$$V_X = 2\pi \int_{x_A}^{x_B} x \cdot f(x)dx$$

VOLUME DI UN SOLIDO DATA LA SEZIONE



$$V_X = \int_{x_A}^{x_B} s(x)\,dx$$

LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

EQUAZIONE LINEARE: presenta tutti gli ordini di derivazione dal più grande fino al termine noto

COEFFICIENTI COSTANTI: tutti i coefficienti che moltiplicano le derivate sono costanti
Es $y'' + 3y' - 4y = 6$ a coefficienti costanti
$y'' + 3x\,y' - 4y = 4$ non è a coefficienti costanti

OMOGENEA: se il termine noto è nullo
Es $y'' + 3y' - 4y = 0$ omogenea
$y'' + 3y' - 4y = 4$ non omogenea

Un' EQUAZIONE che lega tra loro una FUNZIONE e le sue DERIVATE, utilizzando come coefficienti delle funzioni

ORDINE DI UN'EQUAZIONE: la più grande derivata della funzione che compare nell'equazione
$y + y' = 5$ primo ordine
$y + y' + y'' = 5$ secondo ordine

PROBLEMA DI CAUCHY: risolvere un sistema tra un equazione differenziale e una condizione al contorno e consente di trovare il valore della costante d'integrazione

A VARIABILI SEPARABILI

$$y' = y^2 x^2$$

- Scrivere y' come:

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y^2 x^2$$

- Se parare le variabili:

$$\frac{1}{y^2}\,dy = x^2 dx$$

- Integrare:

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int x^2\,dx$$

LINEARE DEL PRIMO ORDINE

$$y' + a(x)y = g(x)$$

- **a(x) = funzione che fa da coefficiente moltiplicativo**
- **g(x) = funzione che fa da termine noto**

- Scrivere l'equazione in forma normale:

$$y' + a(x)y = g(x)$$

- Calcolare l'integrale di a(x):

$$A(x) = \int a(x)dx$$

- Usare la formula risolutiva:

$$y = e^{-A(x)}\left(c_1 + \int g(x)\cdot e^{-A(x)}dx\right)$$

LINEARE DEL SECONDO ORDINE OMOGENEE

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$y = y_o$

LINEARE DEL SECONDO ORDINE NON, OMOGENEE

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

$y = y_o + y_P$

SOLUZIONE DELL'OMOGENEA

- Scrivere il polinomio caratteristico associato:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

- Trovare la soluzione dell'omogenea y_o risolvendo in funzione di λ (trovare λ_1 ε λ_2):

se $\Delta > 0$

$$y_o = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

se $\Delta = 0$

$$y_o = c_1 e^{\lambda_0 x} + c_2 e^{\lambda_0 x}$$

se $\Delta < 0$

$$y_o = c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

dove $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$ sono le soluzioni complesse

VETTORI E SEGMENTI NELLO SPAZIO CARTESIANO

SEGMENTI

LUNGHEZZA

$$D_{AB}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$$

PUNTO MEDIO

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$$
$$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$
$$z_M=\frac{z_A+z_B}{2}$$

VETTORI

ESPRESSIONE MATEMATICA

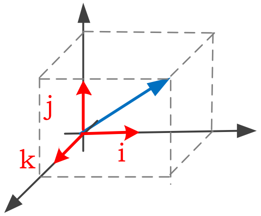
$$\vec{n}=a_x\,\vec{i}+a_y\,\vec{j}+a_z\,\vec{k}$$
$$\vec{a}(a_x;a_y;a_z)$$

VETTORI PARALLELI

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

VETTORI PERPENDICOLARI

$$a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z=0$$



PIANI

EQUAZIONE MATEMATICA

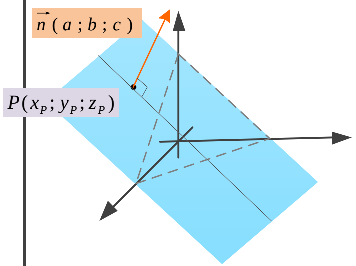
$$a(x-x_P)+b(y-y_P)+c(z-z_P)=0$$
$$ax+by+cz+d=0$$

PIANI PARALLELI

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\qquad d_1\neq d_2$$

PIANI PERPENDICOLARI

$$a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2+c_1\cdot c_2=0$$



DISTANZA PUNTO-PIANO

$$d_{P,\alpha}=\frac{|ax_P+by_P+cz_P+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

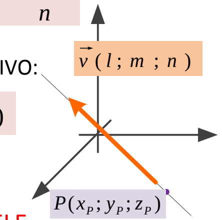
RETTE

EQUAZIONE MATEMATICA

$$\begin{cases}x-x_P=kl\\ y-y_P=km\\ z-z_P=kn\end{cases}$$

$$\frac{x-x_P}{l}=\frac{y-y_P}{m}=\frac{z-z_P}{n}$$

VETTORE DIRETTIVO: $\vec{v}(l;m;n)$



RETTE PARALLELE

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$$

RETTE PERPENDICOLARI

$$l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2=0$$

RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

SFERA

SFERA

$$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2=R^2$$
$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$