TECLA

SPELGATTI

MATEMATICA DI BASE

per la preparazione al triennio

Questo testo è distribuito con licenza Common Creative:
http://creativecommons.org/licenses/

CC BY-NC-ND Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate

E’ permesso scaricare l’opera e condividerla con altri, ma non modificarla ne utilizzarla, interamente o in parte, per scopi commerciali.

1. L'ARITMETICA

L'aritmetica è lo studio dei numeri e delle operazioni che si possono fare su di essi. E' il tipo di matematica che si studia alle scuole elementari e nei primi anni della scuola media e si distingue dall'algebra per il fatto di non utilizzare le lettere come parametro.

Nell'aritmetica si incontrano due elementi:

- I numeri
- Gli operatori matematici

1.1. *Gli elementi dell'aritmetica*

1.1.1. *I numeri*

I numeri non sono tutti uguali. I primi numeri che si studiano vengono chiamati **NATURALI**; sono i numeri interi che si studiano per primi perché sono i numeri con cui i bambini hanno a che fare: sono infatti i numeri che si contano sulle dita (1, 2, 3, eccetera).

Il passo successivo è la definizione dei numeri **RELATIVI**; questi numeri sono semplicemente i numeri interi con il segno, sono quei numeri che ci consentono di dire "oggi ci sono $-20°C$ ". Si chiamano relativi perché il loro valore dipende dal segno, dipende dal lato in cui si trovano rispetto allo zero.

Dunque il numero 20 non ha un unico valore. A seconda del segno può valere + 20 oppure – 20.

Ci sono poi i numeri **RAZIONALI**, cioè quei numeri che si possono esprimere con un rapporto. Ratio in latino significa ragione, intesa come la capacità di usare l'intelletto per trovare un senso a quello che osserviamo. I greci credevano che tutto ciò che può essere contato o misurato potesse essere espresso come rapporto di numeri interi, cioè con le frazioni. Per questo chiamarono razionali i numeri con la virgola che risultano dalle frazioni, come 1,5 che si ottiene dalla frazione $\frac{3}{2}$.

Anche i numeri periodici, che hanno infinite cifre dopo la virgola, tutte uguali, sono razionali. Ad esempio il numero $3,\overline{3}$ si può scrivere come $\frac{10}{3}$.

Furono sempre i greci a scoprire l'esistenza di numeri che non si possono esprimere come rapporti di numeri interi e a chiamarli i numeri **IRRAZIONALI**. Per esprimere questi numeri serve un numero infinito di cifre dopo la virgola, diverse l'una dall'altra. Il pi greco π è un numero irrazionale. I numeri irrazionali si possono anche esprimere con le radici: un numero irrazionale è, ad esempio, $\sqrt{2}$.

La radice quadrata ci porta ai confini dell'insieme dei numeri **REALI** che comprendono i numeri naturali, relativi, razionali e irrazionali.

E' noto che la radice quadrata (e più in generale tutte le radici di ordine pari) esiste solo per i numeri positivi: non esiste, ad esempio, il numero $\sqrt{-1}$.

In realtà non è esatto dire che il numero $\sqrt{-1}$ non esiste.

Le radici di ordine positivo non possono essere negative solo nell'insieme dei numeri reali. Esiste infatti un insieme numerico, chiamato insieme di numeri **IMMAGINARI**, in cui le radici possono essere negative.

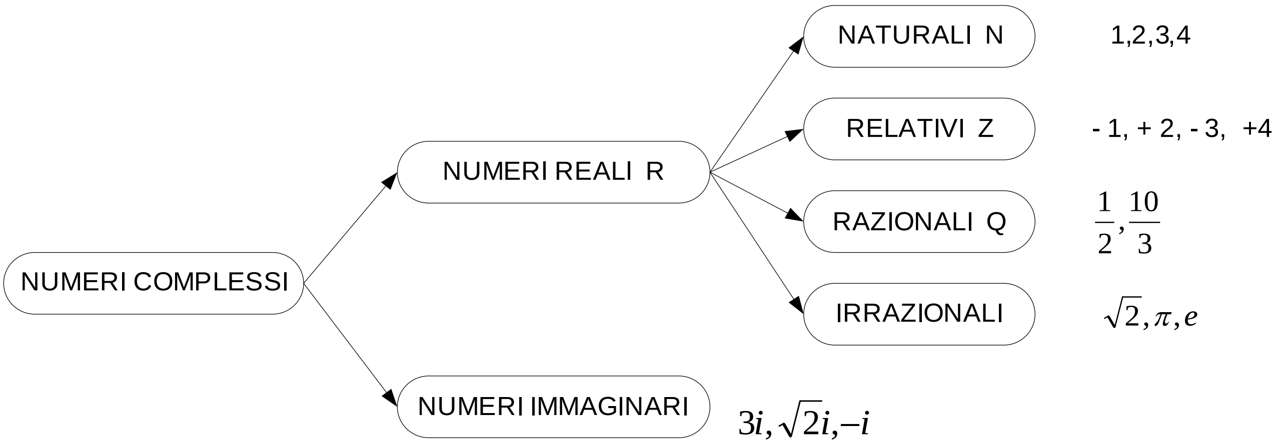
Nell'insieme dei numeri immaginari la quantità $\sqrt{-1}$ si chiama i (unità immaginaria):

$$\sqrt{-9} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{9} = i \cdot \sqrt{9} = 3i$$

Un numero qualunque sarà quindi esprimibile come la somma di una parte reale e di una parte immaginaria.

Questi numeri vengono chiamati **COMPLESSI**.

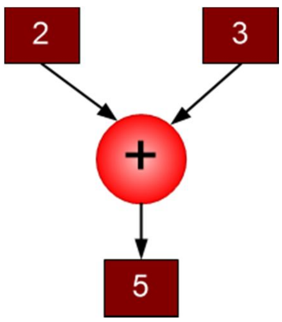
Un numero complesso è, ad esempio, $2 - 4i$.



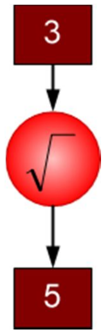
1.1.2. *Gli operatori matematici*

Gli operatori matematici sono tutti quei segni (come + e -) che compiono un'operazione su qualcosa secondo delle regole stabilite. Questo qualcosa può essere un numero o un'intera espressione.

Ad esempio, il + può essere visto come una macchina che compie l'operazione somma su due numeri o su due espressioni. In ingresso avremo due termini, in uscita uno solo:



Esistono anche operatori che in ingresso vogliono un solo numero o una sola espressione, come ad esempio la radice:



Ogni operatore matematico può essere visto come una macchina con degli ingressi e delle uscite. Il numero di ingressi e di uscite dipende dal tipo di operatore.

1.2. *Le quattro operazioni*

Esistono moltissimi operatori matematici, ma quelli più utilizzati sono le 4 operazioni fondamentali:

- Somma e sottrazione
- Moltiplicazione e divisione

Le prime due operazioni presentano alcune limitazioni, mentre la moltiplicazione e la divisione possono sempre essere fatte.

1.2.1. *Il significato dei numeri*

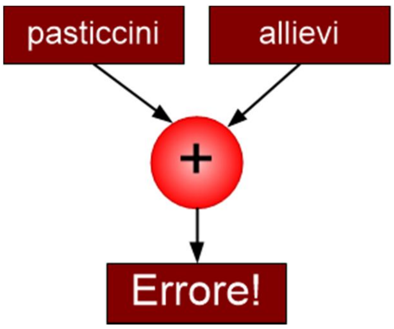
I numeri sono entità astratte, che indicano una quantità. Il numero 2, ad esempio, può indicare 2 mele, 2 persone, 2 metri, 2 secondi e via così.

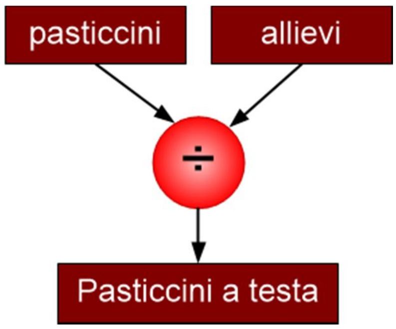
Quando i numeri indicano entità astratte, le quattro operazioni che abbiamo elencato sopra sono sempre fattibili.

Il problema nasce quando i numeri rappresentano qualcosa di concreto.

In quel caso, non è possibile sommare o sottrarre due grandezze diverse, come le mele e le persone, o i metri e i secondi.

E' invece sempre possibile moltiplicare o dividere due grandezze, anche se sono diverse. Ad esempio, è possibile dividere i pasticcini per il numero di studenti in una classe e ottenere una nuova grandezza che è il numero di pasticcini a testa:





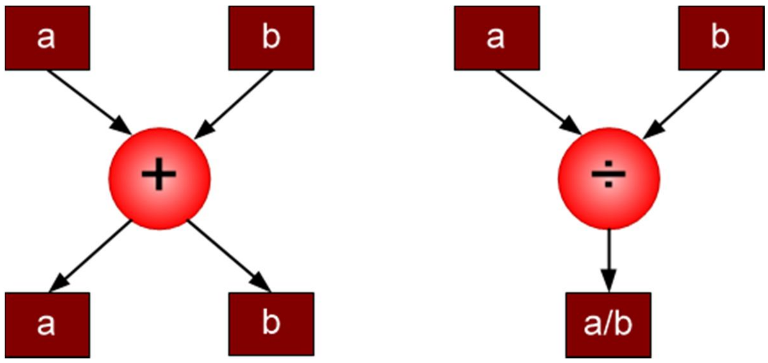
Quindi quando si fa un operazione bisognerebbe sempre indicare di quali grandezze si tratta. In fisica questo significa scrivere l'unità di misura.

In matematica però i numeri vengono usati in maniera astratta: cioè non si riferiscono ad una particolare grandezza, ma ad una grandezza generica. Per indicare grandezze diverse, sono state introdotte le lettere. Ad esempio si indica un generico oggetto (pasticcini, allievi) con la lettera a e un altro elemento, diverso dal primo, con la lettera b. Immaginiamo ad esempio di indicare il numero di pasticcini con a e il numero di allievi con b.

Se diamo in pasto alla macchina SOMMA due termini uguali otteniamo la loro somma, ma se i numeri in ingresso sono diversi, la macchina ce li sputa fuori così come sono entrati. Infatti:

$$2a + 4a = 6a$$

$$2a + 4b = 2a + 4b$$



Se invece inseriamo i due numeri nella macchina MOLTIPLICAZIONE e DIVISIONE otteniamo un risultato:

$$2a \cdot 4a = 8a^2$$

$$2a \div 4b = \frac{a}{2b}$$

Quando si utilizzano le lettere per indicare una generica grandezza a cui il numero si riferisce, si parla di algebra.

LA SOMMA E LA SOTTRAZIONE SONO POSSIBILI SOLO TRA GRANDEZZE DELLO STESSO TIPO; LA MOLTIPLICAZIONE E LA DIVISIONE SONO POSSIBILI TRA GRANDEZZE QUALUNQUE.

2.L'ALGEBRA

Nell'algebra al posto dei numeri si usano i cosiddetti **MONOMI**. Un monomio è formato da tre elementi:

- Un segno più o meno
- Una parte numerica, chiamata coefficiente numerico
- Una parte letterale

Queste tre parti sono tra loro moltiplicate.

Se il segno è positivo, è possibile non scriverlo:

$$+2ab = 2ab$$

Se il coefficiente è pari a 1, di nuovo si può sotto intendere:

$$1ab = ab$$

Due o più monomi si dicono simili quando hanno la stessa parte letterale. Ad esempio:

$$12x^2y \quad e \quad 3x^2y$$

sono monomi simili, mentre:

$$4xyt \quad e \quad 2xy$$

non sono monomi simili.

Il grado di un monomio è dato dalla somma algebrica degli esponenti della parte letterale. Ad esempio:

$$3x^2y^3$$

è un monomio di grado 5.

Una lettera senza esponente si considera di esponente pari a 1:

$$z^1 = z$$

UN MONOMIO È COSTITUITO DA UN SEGNO, UN NUMERO E UNA LETTERA. IL GRADO DEL MONOMIO È LA SOMMA DEGLI ESPONENTI DELLE LETTERE.

L'espressione algebrica costituita dalla somma o dalla sottrazione di due o più monomi costituisce un **POLINOMIO**. Ad esempio:

$$4x^3y + 3ab - 2a^2$$

Il grado di un polinomio è il massimo grado dei monomi che lo compongono. Ad esempio nel caso precedente il polinomio è di grado 4.

2.1. *Operazioni tra monomi e polinomi*

Per quanto riguarda i monomi valgono le stesse regole dell'aritmetica: è cioè possibile sommare o sottrarre due monomi solo se sono simili. E' invece sempre possibile moltiplicare o dividere due monomi.

2.2.1. *Somma e sottrazione tra monomi*

La somma e la sottrazione di due monomi opera solo sulla parte numerica, lasciando invariata la parte letterale.

Si pensi ad esempio alla somma di 2 metri e 5 metri. Il risultato sarà 7 metri. Non è cambiata la grandezza da sommare, ma solo la quantità numerica.

$$5m - 2m = 3m$$

$$5ab - 2ab = 3ab$$

La somma di due monomi uguali e opposti da come risultato zero:

$$2ab - 2ab = 0$$

2.2.2. *Moltiplicazione e divisione tra monomi*

La moltiplicazione e la divisione tra due monomi è sempre possibile. Per eseguire queste operazioni è necessario operare nel modo seguente:

- Si trova il segno tramite la regola dei segni
- Si esegue l'operazione sulla parte numerica
- Si esegue l'operazione sulla parte letterale

Si noti che il risultato trovato ha una parte letterale diversa da quella dei monomi di partenza. Infatti, quando si dividono o si moltiplicano due grandezze diverse si ottiene una nuova grandezza.

Ad esempio, dalla divisione tra lo spazio percorso e il tempo impiegato salta fuori la velocità:

$$\frac{30\, metri}{60\, secondi} = 0{,}5\, \frac{metri}{secondo}$$

2.2.3. *Le potenze*

Per potenza di un monomio si intende un altro monomio che si ottiene dal precedente elevando sia il coefficiente che la parte letterale.

$$(-2xy^2)^2 = 4x^2y^4$$

$$(-2xy^2)^3 = -8x^3y^6$$

Le potenze godono delle seguenti proprietà:

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^m \cdot a_k = a^{m+k}$$

$$a^m : a^k = a^{m-k}$$

$$(a^m)^k = a^{m \cdot k}$$

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

$$a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k}$$

$$a^{\frac{m}{k}} = \sqrt[k]{a^m}$$

2.2.4. *M.C.D e m.c.m*

Per **MASSIMO COMUNE DIVISORE MCD** di due o più monomi si intende il più grande tra i divisori comuni.

Per **MINIMO COMUNE MULTIPLO mcm** di due o più monomi si intende il più piccolo tra i multipli comuni.

Per calcolare il M.C.D di due o più monomi si prendono i fattori primi comuni, presi una sola volta, con il minimo esponente.

Per calcolare il m.c.m di due o più monomi si prendono i fattori primi, comuni e non comuni, presi una sola volta, con il massimo esponente.

$$2abc^3 \quad 6ac \quad 4ab^2c^2 \quad M.C.D. = 2ac \quad m.c.m = 12ab^2c^3$$

2.2.5. *Somma e sottrazione tra polinomi*

Per sommare due o più polinomi è sufficiente riscriverli effettuando i cambiamenti di segno necessari. Ad esempio:

$$(4a + 12b + 7c) - (21x - 12xy) = 4a + 12b + 7c - 21x + 12xy)$$

2.2.6. *Moltiplicazione e divisione tra polinomi*

Per moltiplicare due polinomi è sufficiente moltiplicare ogni singolo monomio del primo fattore per tutti i monomi del secondo fattore. Ad esempio:

$$(2a + b)(c + 2) = 2ac + 4a + bc + 2b$$

2.2.7. *La scomposizione dei polinomi*

Alcuni polinomi possono essere scomposti in fattori, cioè in termini moltiplicati tra loro.

La scomposizione di un polinomio in fattori può essere fatta in diversi modi:

- Prodotti notevoli
- Raccoglimenti a fattor comune (totali e parziali)
- Regola di Ruffini

Prodotti notevoli

Le regole da utilizzare sono le seguenti:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Raccoglimento a fattore comune

Per raccoglimento a fattore comune si intende mettere in evidenza, tra un gruppo di monomi, un fattore comune a essi, che coincide con il M.C.D:

$$2a^2b - 6ab^3 = 2ab(a - 3b^2)$$

Molto spesso può succedere che in un polinomio non si possa raccogliere nulla.

$$ab^2 - ab + 2b - 2$$

In questo caso si procede cercando dei raccoglimenti a fattore comune solo tra singoli gruppi di monomi:

$$ab(b - 1) + 2(b - 1)$$

Possiamo notare che si ha la possibilità di un ulteriore raccoglimento a fattore comune, (b – 1):

$$(b - 1)(ab + 2)$$

Ruffini

Vediamo ora come sia possibile arrivare ad una scomposizione tramite il 3° metodo, la regola di Ruffini, di un polinomio. Consideriamo il polinomio seguente:

$$x^3 - 7x - 6$$

Per scomporlo dobbiamo cercare un divisore, cioè un numero che, sostituito alla x, renda nullo il polinomio. In linea di massima si cercano i divisori tra i fattori primi del termine noto, in questo caso: $\pm1, \pm2, \pm3$

Se sostituiamo il valore -1 all'interno del polinomio otteniamo:

$$1^3 - 7 \cdot 1 - 6 = 0$$

Quindi -1 è un divisore, cioè una radice del polinomio.

Per usare la regola di Ruffini bisogna impostare una tabella di questo tipo dove **D** indica il **divisore** e **C1**, **C2** e **C3** indicano i **coefficienti** del polinomio (**C4** è il termine noto):

	C1 C2 C3	**C4**
D	**riga dei parziali**	
	riga del risultato	**resto**

A questo punto il metodo di risoluzione prevede di:

- riportare nella **riga del risultato** il coefficiente C1, così come è scritto.

	C_1	C_2	C_3	C_4
D				
	C_1			

- Moltiplicare il divisore **D** per il primo termine del risultato **C_1** e scriverlo nella **riga dei parziali**, sotto al coefficiente successivo **C_2**.

	C_1	C_2	C_3	C_4
D		$D \cdot C_1$		
	C_1			

- Sommare il coefficiente parziale $D \cdot C_1$ con il coefficiente del polinomio corrispondente **C_2**:

	C_1	C_2	C_3	C_4
D		$D \cdot C_1$		
	C_1	$(C_2+D \cdot C_1)$		

- Moltiplicare il divisore **D** per il secondo termine del risultato e scriverlo nella riga dei parziali, sotto al coefficiente successivo:

	C_1	C_2	C_3	C_4
D		$D \cdot C_1$	$D(C_2+D \cdot C_1)$	
	C_1	$(C_2+D \cdot C_1)$		

La procedura a questo punto è iterativa, cioè procede sempre per moltiplicazioni e somme successive, fino ad arrivare alla casella del resto.

Se tutto è stato fatto per bene, nella casella del resto deve risultare zero.

L’esempio precedente conduce ai seguenti risultati numerici:

	1	0	-7	-6
-1		-1	1	6
	1	-1	-6	0

I numeri scritti nella riga centrale (1,-1,-6), rappresentano i coefficienti del polinomio abbassato di un grado:

$$1x^2 - 1x - 6$$

Questo polinomio è uno dei fattori in cui è possibile scomporre il polinomio di terzo grado:

$$x^3 - 7x - 6 = (x + 1)(x^2 - x - 6)$$

A sua volta questo fattore è scomponibile con la regola per il calcolo delle radici (regola del delta):

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

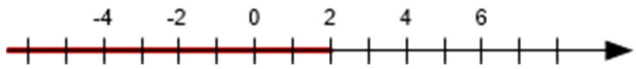
Da cui:

$$x^3 - 7x - 6 = (x + 1)(x - 3)(x + 2)$$

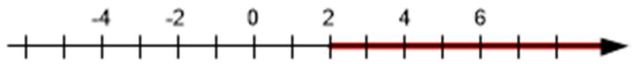
3.EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

In matematica è molto importante il concetto di **INSIEME**. Si parla di insieme ogni volta che si considera un **INTERVALLO DI VALORI**. Sono possibili tre tipi di intervalli:

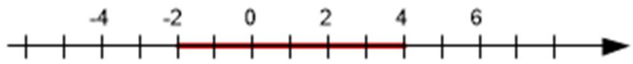
Intervallo di numeri minori di un valore, che quindi possono assumere valori fino a $-\infty$ (so legge **MENO INFINITO**), cioè un numero grandissimo, con davanti il segno meno.



Intervallo di numeri maggiori di un valore, che possono assumere valori fino a $+\infty$ (si legge **PIÙ INFINITO**), cioè un numero grandissimo positivo.



Intervallo di numeri compreso tra due valori.



Un intervallo può comprendere gli estremi oppure no. Ad esempio, il primo caso comprende le x minori di 2. Se la x può assumere anche il valore 2 ($x = 2$) allora si scriverà:

$$x \leq 2$$

e si dirà che l'intervallo è **CHIUSO**.

Un intervallo chiuso, ad esempio $2 \leq x \leq 3$, si indica con le parentesi quadre:

$$[2,3]$$

Se invece la x non può assumere il valore 2 si scriverà:

$$x < 2$$

e si dirà che l'intervallo è **APERTO**.

Un intervallo aperto, ad esempio $2 < x < 3$, si indica con le parentesi tonde:

$$(2,3)$$

Questi due termini trovano giustificazione nel fatto che all'interno di un segmento ci sono infiniti numeri. Prendiamo ad esempio il caso dell'intervallo $0 \leq x \leq 1$ che comprende tutti i numeri tra 0 e 1 (inclusi gli estremi). I numeri all'interno di questo intervallo sono infiniti: c'è $x = 0{,}1$ ma anche $x = 0{,}01$ e $x = 0{,}001$ e aggiungendo zeri dopo la virgola possiamo scrivere sempre più numeri, senza finire mai.

Dunque, qual è il numero più piccolo dell'intervallo $0 \leq x \leq 1$? La risposta è $x = 0$.

Se invece consideriamo l'intervallo aperto $0 < x < 1$ alla domanda "qual è il numero più piccolo che sta in questo intervallo?" non possiamo rispondere. Infatti la x non può assumere il valore zero, ma può diventare sempre più piccola. L'intervallo non ha un limite, non ha una fine: è aperto.

3.1. *Operazioni sugli insiemi*

Quando si hanno due o più insiemi è possibile fare alcune operazioni. Le principali sono due: intersezione e unione.

3.1.1. *L'intersezione*

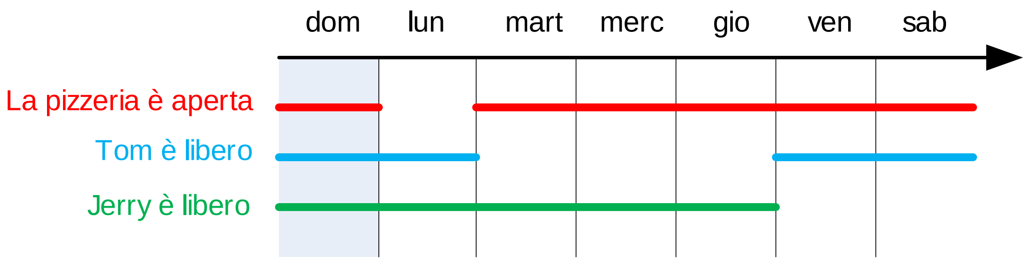
E' un operazione che consiste nel prendere gli elementi in comune a due o più insiemi. Questo semplice concetto, noto fin dalle scuole medie, nasconde in realtà un insidia. La cosa difficile dell'intersezione è capire quando si deve fare e come si fa a fare l'intersezione di due o più insiemi numerici.

L'intersezione si fa quando una condizione deve essere verificata **CONTEMPORANEAMENTE** ad un'altra. Ad esempio, affinché due amici, Tom e Jerry, possano andare a mangiare la pizza insieme si devono verificare le seguenti condizioni:

- **La pizzeria deve essere aperta.**
- **Tom deve avere la serata libera.**
- **Jerry deve avere la serata libera.**

Se la pizzeria è chiusa il lunedì, Tom lavora martedì, mercoledì e giovedì mentre Jerry lavora sabato e domenica, quando i due amici possono andare in pizzeria?

Per rispondere a questa domanda bisogna fare l'operazione di intersezione tra gli insiemi dei giorni possibili per mangiare la pizza:



Dunque l'unica possibilità per i due amici è andare in pizzeria la domenica poiché quello è l'unico giorno che soddisfa tutte e tre le condizioni.

Lo stesso ragionamento si può fare con gli insiemi numerici. Dati due o più intervalli, trovare la loro intersezione significa trovare gli intervalli in comune.

In matematica il segno che si utilizza per l'**INTERSEZIONE** è la **PARENTESI GRAFFA**:

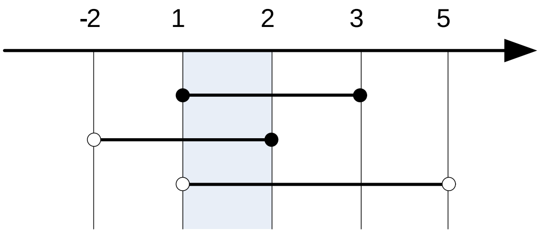
$$\begin{cases} insieme\ 1 \\ insieme\ 2 \\ insieme\ 3 \end{cases}$$

I sistemi studiati nel biennio sono esempi di intersezioni.

Esempio

Si trovino le intersezioni dei seguenti intervalli:

$$\begin{cases} [1,3] \\ (-2,2] \\ (1,5) \end{cases}$$



L’intersezione è l’insieme dei numeri $1 < x \leq 2$

3.1.2. *L’unione*

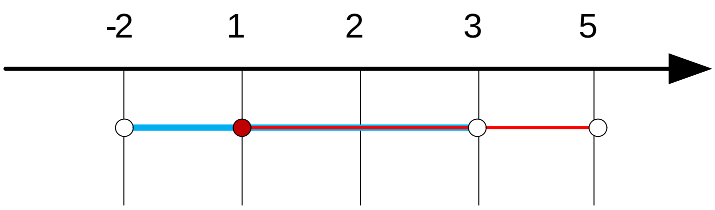
L’unione tra due insiemi è l’operazione che prende gli elementi che appartengono o al primo insieme, o al secondo insieme o a entrambi.

Si fa l’unione quando la soluzione non richiede che siano soddisfatte tutte le condizioni, ma almeno una di esse.

Esempio

Fare l’unione dei seguenti intervalli

$$-2 < x < 3 \quad \text{U} \quad 1 \leq x < 5$$



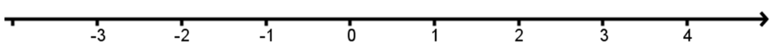
L’unione è quindi l’insieme $-2 < x < 5$

3.2. *Topologia in R*

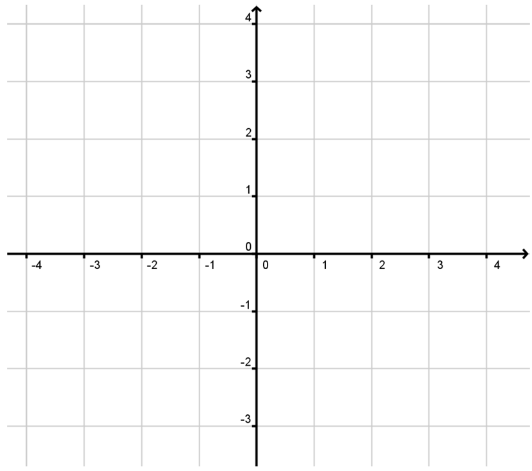
Il termine topologia deriva dal greco e significa studio dei luoghi.

Nel caso della matematica parliamo di luoghi intesi come “**LUOGHI GEOMETRICI**”, cioè delle porzioni di spazio unidimensionale, bidimensionale o tridimensionale.

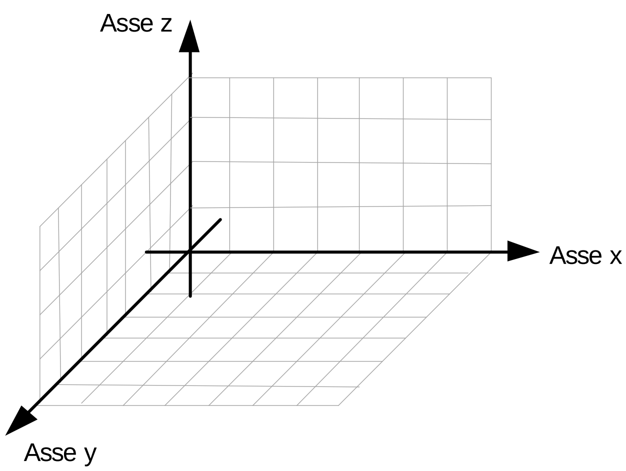
Ad esempio, possiamo rappresentare i numeri in uno spazio 1D utilizzando una retta orientata su cui abbiamo stabilito un origine:



Di solito questa linea prende il nome di $asse\ x$ e i numeri che si trovano su di essa sono indicati con la lettera x che può essere chiamata o incognita o variabile a seconda del problema che stiamo considerando.
Se vogliamo rappresentare luoghi geometrici 2D, come una figura piana, è necessario introdurre un'altra retta. Se la retta è posta perpendicolarmente alla prima, si ottiene il cosiddetto piano cartesiano.



Di solito l'asse orizzontale viene chiamato asse delle ascisse, o $asse\ x$, mentre quello verticale viene chiamato asse delle ordinate, o $asse\ y$.
Il piano cartesiano consente di rappresentare oggetti piani, come i triangoli.
Se vogliamo rappresentare degli oggetti 3D, come una sfera, abbiamo bisogno di un terzo asse, che di solito viene chiamato z.



Lo studio della matematica delle scuole superiori considera il piano cartesiano e lo studio delle curve piane.

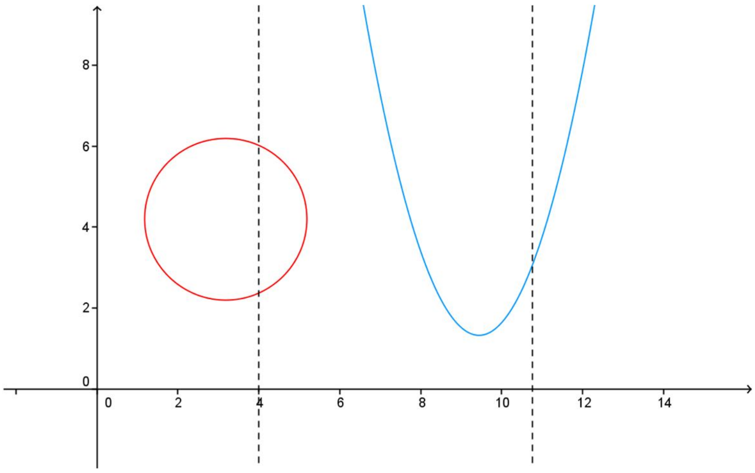
3.2.1. *Luoghi geometrici e funzioni*

Sul piano cartesiano è possibile rappresentare delle curve qualunque. Queste curve vengono chiamate luoghi geometrici.

I punti che stanno sulla curva sono legati da una relazione matematica che consente di trovare il valore della y conoscendo il valore della x. Per quanto sia complicata (e a volte impossibile da trovare) esiste sempre un'espressione che lega la x alla y.

Alcuni luoghi geometrici godono di una particolare proprietà: ad ogni valore della x corrisponde uno ed un solo valore della y.

Per capire questo concetto paragoniamo la **CIRCONFERENZA** alla **PARABOLA**.



In una **CIRCONFERENZA**, ci sono due punti che hanno la stessa x (pur avendo diverse y). Invece in una parabola non esistono due punti che hanno la stessa x.

Tutte le curve che godono della proprietà della parabola si dicono funzioni.

Il concetto di funzione è strettamente legato a quello di equazione e disequazione.

3.3. *Equazioni, disequazioni, funzioni*

Quando ci troviamo di fronte un'espressione matematica dobbiamo per prima cosa capire se si tratta di un'equazione, di una disequazione o di una funzione.

Un'**EQUAZIONE** è un espressione in cui compare il segno di uguaglianza (=) e una lettera, di solito indicata con x, chiamata incognita. Quando si ha a che fare con un'equazione lo scopo del gioco è trovare tutti i valori dell'incognita che rendono vera l'equazione.

Ad esempio:

$$x + 1 = 2$$

È un equazione di incognita x. Se sostituiamo alla x il valore 3 otteniamo:

$$3 + 1 = 2$$

Che è falsa. Dunque $x = 3$ non è soluzione dell'equazione. Se sostituiamo alla x il valore 1 otteniamo:

$$1 + 1 = 2$$

Che è vera e quindi $x = 1$ è soluzione dell'equazione.

Potrebbe anche esserci più di un valore che rende vera l'eguaglianza: ogni equazione ha un numero di soluzioni pari al suo grado. Ad esempio:

$$2x - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad 1\, soluzione$$
$$x^2 + 3x - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad 2\, soluzioni$$
$$x^3 + 3x - 4x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad 3\, soluzioni$$
$$2x^4 + 5x^3 - 3x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad 4\, soluzioni$$

Attenzione però che alcune soluzioni possono essere uguali (ad esempio si può trovare due volte $x = 1$) oppure possono essere immaginarie (è possibile ad esempio trovare $x = 2 + 3i$).

Una **DISEQUAZIONE** si riconosce dal segno di disuguaglianza ($< \ > \ \leq \ \geq$) e dalla presenza di una lettera, di solito indicata con x, chiamata incognita.

A differenza delle equazioni le disequazioni danno come risultato un intervallo di numeri. Ad esempio di può avere $-1 < x \leq 3$ oppure $x > 2$. E' anche possibile trovare più di un intervallo di valori per una stessa disequazione.

Un luogo geometrico si riconosce perché sono presenti due lettere, di solito x e y e il segno di uguaglianza. Esempi di funzioni sono:

$$x^2 + y^2 + 3x - 4x + 1 = 0$$
$$2x - 2y + 4 = 0$$

Se in un luogo geometrico è possibile separare la y dal resto dell'espressione allora si parla di funzione.

Ad esempio:

$$2x - 2y + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad -2y = -2x - 4 \quad \rightarrow \quad y = x + 2$$

<u>Classificazione in base alle operazioni sulla variabile x</u>

E' possibile classificare le equazioni, le disequazioni e le funzioni in due grandi categorie:

- Equazioni/disequazioni/funzioni algebriche
- Equazioni/disequazioni/funzioni trascendenti

Si dicono **EQUAZIONI, DISEQUAZIONI O FUNZIONI ALGEBRICHE** quelle espressioni nelle quali la x è legata a tutto il resto dell'espressione tramite le quattro operazioni studiate alle scuole elementari: somma, sottrazione, divisione e moltiplicazione.

Anche le potenze appartengono a questa categoria di operazioni: infatti la potenza può essere vista come una moltiplicazione:

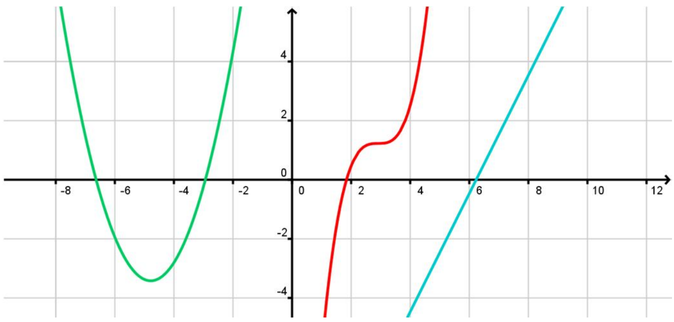
$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

La radice è una potenza frazionaria:

$$\sqrt[N]{x^A} = x^{\frac{A}{N}}$$

quindi anch'essa può essere vista come una moltiplicazione.

Esempi di funzioni algebriche sono le **rette**, le **parabole**, le **cubiche**:



Se osserviamo le loro espressioni matematiche possiamo vedere che i numeri e le incognite (x e y) sono legati dalle 4 operazioni algebriche:

$$\mathbf{y = 2x - 14}$$

$$\boldsymbol{y = 2x^2 + 3x - 4}$$

$$\boldsymbol{y = (x - 15)^3}$$

Se la posto della y mettiamo uno zero otteniamo le corrispondenti equazioni:

$$\mathbf{2x - 14 = 0}$$

$$\boldsymbol{2x^2 + 3x - 4 = 0}$$

$$\boldsymbol{(x - 15)^3 = 0}$$

Si dicono **EQUAZIONI, DISEQUAZIONI O FUNZIONI TRASCENDENTI** quelle nelle quali la x si trova racchiusa all'interno di un'altra funzione e quindi è collegata agli altri termini da qualcosa che va oltre le quattro operazioni algebriche (trascendente vuol infatti dire "che va oltre").

Lo studio delle funzioni trascendenti è parte del programma di quarta liceo.

Le funzioni trascendenti sono di tre tipi: trigonometriche, esponenziali e logaritmiche.

<u>Classificazione in base alla posizione della x</u>

E' possibile classificare le equazioni, le disequazioni e le funzioni anche in base alla posizione della variabile x. Si parla quindi di:

- **FUNZIONI INTERE**: la x si trova solo al numeratore. Se una funzione ha un denominatore in cui compaiono solo numeri è comunque intera.

$$y = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$

$$y = \frac{x^2 - 1}{2}$$

- **FUNZIONI FRATTE**: al denominatore c'è almeno una x.

$$y = \frac{1}{x}$$

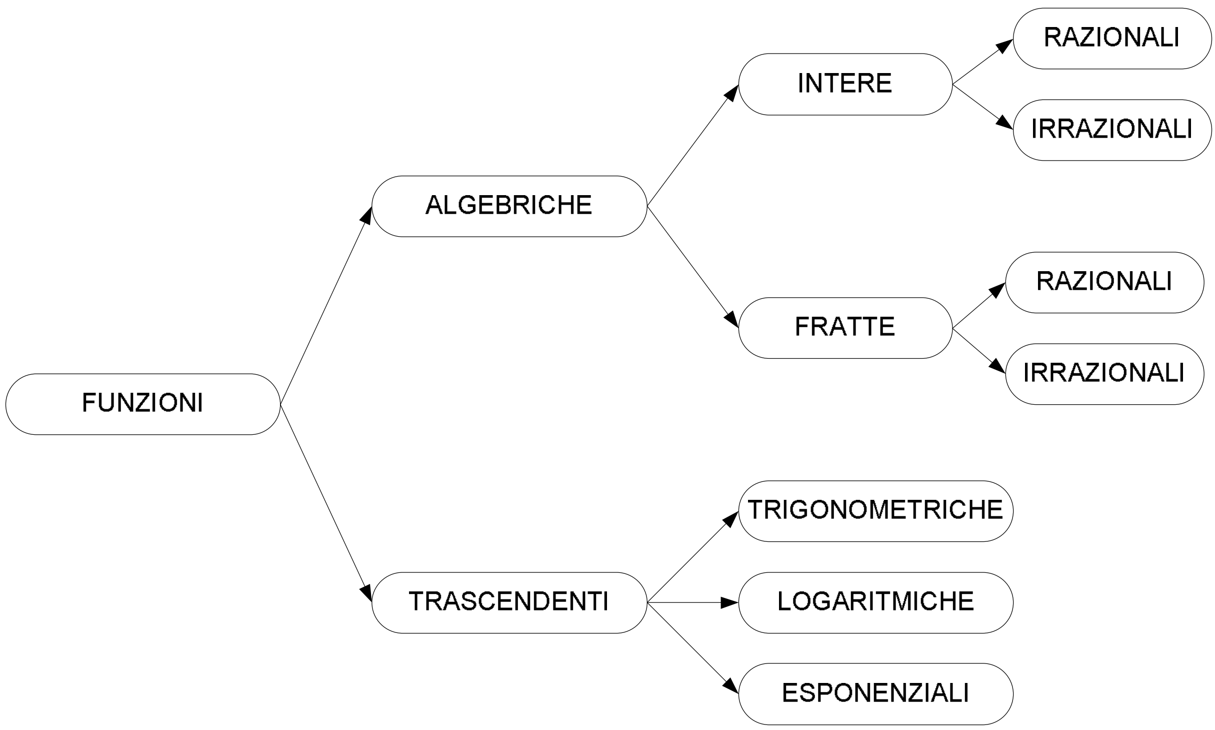
- **FUNZIONI IRRAZIONALI**: c'è almeno una x sotto radice.

$$y = \sqrt{x - 2} + 1$$

  Attenzione, la funzione non è irrazionale se sotto la radice non compare la x.

- **FUNZIONI RAZIONALI**: la x non si trova mai sotto radice.

$$y = \sqrt{2}\,x + 1$$



3.4. *Equazioni e disequazioni*

Le equazioni e le disequazioni derivano dalle funzioni (e quindi possono essere classificate nello stesso modo).

3.3.1. *Equazioni*

Un'equazione è un'espressione matematica contenente un'incognita (solitamente chiamata x, ma che può assumere qualunque simbolo) e un operatore matematico di uguaglianza. Ad esempio:

$$2x + 3 = x - 1$$

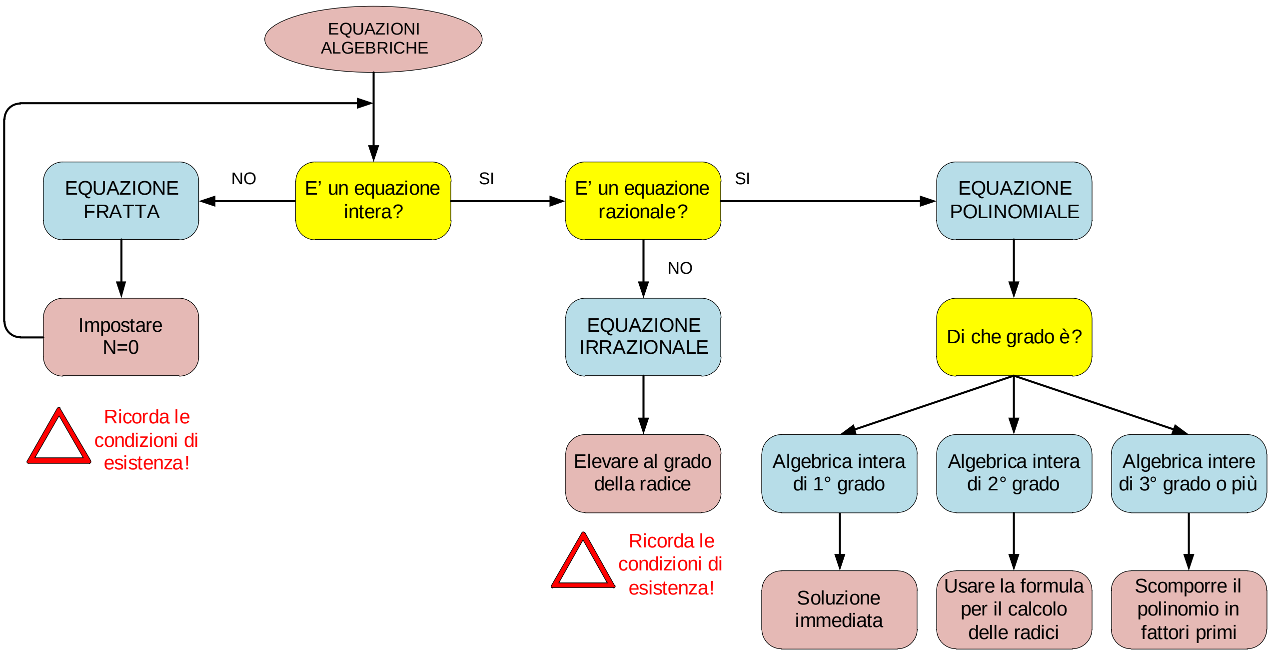
Si dice grado dell'equazione il grado del monomio di grado massimo contenuto nell'espressione.

Identificare le equazioni

Il primo passo per risolvere un equazione è quello di capire a quale categoria appartiene.

Bisogna quindi guardare la posizione della x. Per prima cosa bisogna domandarsi se l'equazione è algebrica o trascendente. In questo capitolo ci occuperemo solo delle equazioni algebriche.

Lo schema seguente mostra un diagramma a blocchi utile per il ragionamento:



Risolvere le equazioni

EQUAZIONI ALGEBRICHE INTERE DI 1° GRADO: sono di immediata soluzione, isolando la x dal resto dell'espressione.

EQUAZIONI ALGEBRICHE INTERE DI 2° GRADO: si usa la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EQUAZIONI ALGEBRICHE INTERE DI 3° GRADO O SUPERIORE: per risolvere un equazione di grado superiore al secondo è necessario scomporre il polinomio in fattori di 1° grado con la regola di Ruffini.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

Una volta fatto questo, i singoli termini vengono uguagliati a zero:

$$(x - x_1) = 0$$
$$(x - x_2) = 0$$
$$(x - x_3) = 0$$

Ogni polinomio può essere scritto come prodotto di fattori di primo grado. Il numero dei fattori è uguale al grado del polinomio.

Esempio:

$$ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$$

Dove x_1 e x_2 sono le radici del polinomio, cioè le soluzioni del polinomio uguagliato a zero:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lo stesso vale per un polinomio di terzo grado:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Dove x_1, x_2 e x_3 sono le **RADICI DEL POLINOMIO**, cioè le soluzioni del polinomio uguagliato a zero:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

EQUAZIONI ALGEBRICHE FRATTE: Si dice fratta un'equazione che ha l'incognita, cioè la x, al denominatore.

A prescindere dal tipo di espressione che si trova al numeratore e al denominatore, bisogna considerare che una frazione si annulla solo quando il numeratore è pari a zero.

Il denominatore non può mai essere uguale a zero, quindi i valori della x che lo annullano sono da escludere. Qualora trovassimo nella soluzione uno dei valori che annullano il denominatore, non lo prenderemo in considerazione.

La soluzione si trova quindi ponendo il numeratore uguale zero e risolvendo l'equazione che ne risulta.

$$\frac{Numeratore}{Denominatore} = 0 \quad \rightarrow \quad Numeratore = 0$$

Vogliamo ad esempio risolvere la seguente equazione fratta:

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1} = 0$$

La soluzione sarà trovata ponendo il numeratore uguale a zero:

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

Si tratta di un'equazione di 2° grado, risolubile con la formula per il calcolo delle radici:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} -4 \\ 1 \end{cases}$$

Adesso dobbiamo verificare che le soluzioni trovate siano accettabili. Per far questo dobbiamo imporre che il denominatore sia diverso da zero:

$$x^2 - 1 \neq 0$$

Il risultato che troviamo viene chiamato condizione di esistenza.

La condizione di esistenza è:

$$x^2 - 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x^2 \neq 1 \quad \rightarrow \quad x \neq \pm 1$$

Quindi, delle due soluzioni trovate, solo una è accettabile: $x = -4$.

La soluzione $x = 1$ è da scartare in quanto esclusa dalla condizione di esistenza.

EQUAZIONI ALGEBRICHE IRRAZIONALI: per risolvere un'equazione irrazionale si devono fare due cose:

- se l'ordine della radice è pari, porre il radicando maggiore o uguale a zero poiché non può esistere una radice negativa con odine pari.
- elevare entrambi i membri dell'equazione di un grado pari all'ordine della radice

$$\sqrt[n]{A} = B \quad \rightarrow \quad \left(\sqrt[n]{A}\right)^n = (B)^n$$

Ad esempio:

$$\sqrt{x+5} = x - 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ \left(\sqrt{x+5}\right)^2 = (x-1)^2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x \geq -5 \\ x + 5 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x \geq -5 \\ x = 4 \;\; V \;\; x = -1 \end{cases}$$

NB: bisogna ricordarsi di controllare che tutte le soluzioni siano comprese nel campo di esistenza.

$$\sqrt[3]{x+2} = 3 \quad \rightarrow \quad x + 2 = (3)^3 \quad \rightarrow \quad x + 2 = 27 \quad \rightarrow \quad x = 25$$

3.3.2. ***Disequazioni***

Una disequazione è un'espressione matematica contenente un'incognita (solitamente chiamata x, ma che può assumere qualunque simbolo) e un operatore matematico di disuguaglianza, cioè maggiore o minore. Ad esempio:

$$2x + 3 \geq x - 1$$

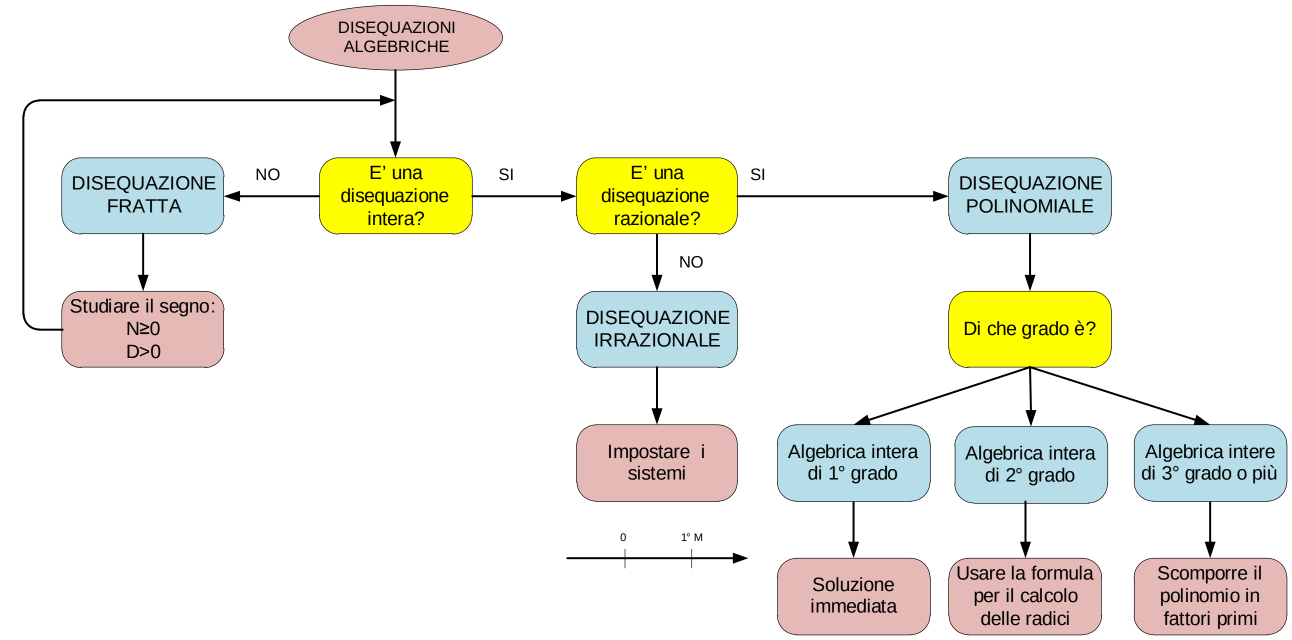
$$x - 5 \leq 2$$

Si dice grado della disequazione il grado del monomio di grado massimo contenuto nell'espressione.

Riconoscere una disequazione

Anche per risolvere una disequazione è necessario identificarla nello stesso modo delle equazioni. L'unica cosa che cambia è il metodo di risoluzione.

Lo schema seguente mostra il ragionamento da fare per identificare correttamente una disequazione e il relativo metodo di soluzione:



Risolvere una disequazione

DISEQUAZIONI ALGEBRICHE DI 1° GRADO: per risolvere una disequazione di primo grado, si deve isolare l'incognita. Ad esempio:

$$5x - 3 > 2x + 1 \quad \rightarrow \quad 5x - 2x > 1 + 3 \quad \rightarrow \quad 3x > 4 \quad \rightarrow \quad x > \frac{4}{3}$$

DISEQUAZIONI ALGEBRICHE INTERE DI 2° GRADO O SUPERIORE: per risolvere una disequazione di questo tipo è necessario scomporre il polinomio in fattori primi in modo da ricondursi ad un espressione del tipo:

$$A \cdot B \cdot C > 0$$

A questo punto il problema diventa capire quando ciò che sta al primo membro risulta maggiore o minore dello zero, cioè quando è positivo o quando è negativo.

Dunque bisogna capire quale sarà il segno dei singoli pezzi (A, B, C, ecc...) e quale il segno totale dell'espressione.

Ad esempio, se abbiamo un espressione del tipo:

$$A \cdot B \geq 0$$

Il prodotto dei due termini, A e B, sarà positivo (maggiore di zero) quando sia A che B hanno lo stesso segno.

$$2 \cdot 3 = 6 > 0$$

$$(-2) \cdot (-3) = 6 > 0$$

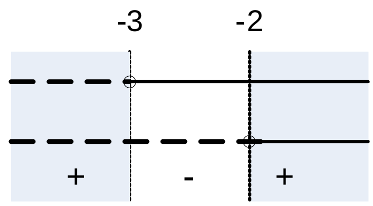
Per risolvere una disequazione di grado superiore al primo bisogna:

- scomporre il polinomio in fattori di primo grado;
- analizzare il segno di ogni fattore per capire quando è positivo e quando è negativo;
- utilizzare la regola dei segni per capire quando l'intera espressione è positiva o negativa.

Esempio:

$$x^2 + 5x + 6 > 0$$

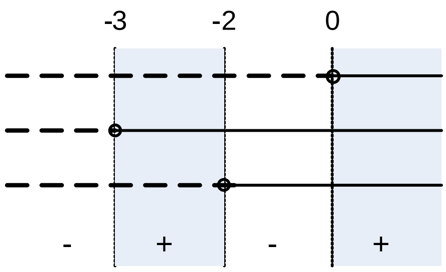
$$(x+2)(x+3) > 0 \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} x+2>0 & \rightarrow & x>-2 \\ x+3>0 & \rightarrow & x>-3 \end{matrix}$$



Esempio:

$$x^3 + 5x^2 + 6x > 0$$

$$x(x+2)(x+3) > 0 \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} x>0 & & \\ x+2>0 & \rightarrow & x>-2 \\ x+3>0 & \rightarrow & x>-3 \end{matrix}$$



DISEQUAZIONI ALGEBRICHE FRATTE: quanto visto finora vale anche per la frazione. Per risolvere una disequazione fratta bisogna per prima cosa ricondurla alla forma classica:

$$\frac{Numeratore}{Denominatore} > 0$$

Il segno di una frazione è stabilito dal prodotto dei segni del numeratore e del denominatore. Quindi bisogna analizzare i segni delle due parti della frazione:

$$Numeratore > 0$$
$$Denominatore > 0$$

Una volta risolte queste due disequazioni, che sono intere, i risultati si mettono in uno schema per effettuare il prodotto dei segni in maniera analoga al caso precedente.

DISEQUAZIONI ALGEBRICHE IRRAZIONALI: in una disequazione non possiamo elevare al quadrato senza prima avere fatto alcune considerazioni.

Se eleviamo al quadrato due numeri positivi, siamo certi di non modificare la relazione esistente tra essi:

$$2 < 3 \quad \rightarrow \quad 2^2 < 3^2 \quad \rightarrow \quad 4 < 9$$

Se invece i numeri sono negativi questo non è più vero:

$$-3 < -2 \quad \rightarrow \quad (-3)^2 < (-2)^2 \quad \rightarrow \quad 9 < 4$$

Il risultato della disequazione precedente è chiaramente falso. Questo accade perché quando si eleva un numero ad una potenza positiva il segno sparisce: se il numero era positivo rimane positivo, ma se il numero era negativo diventa positivo.

Quando si risolve una disequazione irrazionale è quindi necessario capire che segno hanno i due membri della disequazione.

Per prima cosa bisogna isolare la radice al primo membro fino ad ottenere una struttura di questo tipo:

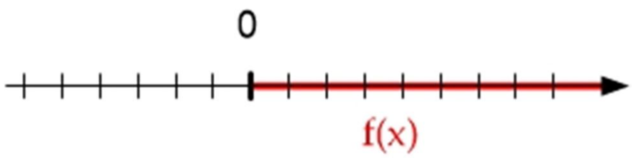
$$\sqrt{f(x)} \lesseqgtr h(x)$$

Dove $f(x)$ e $h(x)$ sono due polinomi.

Bisogna sempre considerare che l'argomento della radice, chiamato radicando, deve essere positivo.

$$\boldsymbol{f(x)} \geq 0$$

Quindi, sulla linea dei numeri, la radice sarà collocata a destra dello zero:



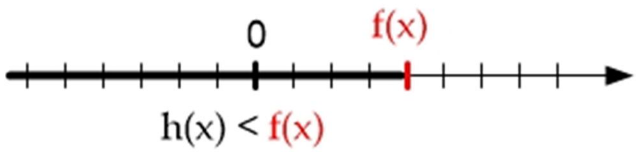
A questo punto bisogna analizzare l'altro membro della disequazione e collocarlo nella giusta posizione sulla linea dei numeri. Per far questo bisogna distinguere il caso in cui il secondo membro è maggiore della radice e il caso in cui è minore della radice.

CASO 1

$$\sqrt{f(x)} \geq h(x)$$

La radice è sicuramente positiva, quindi sta alla destra dello zero.

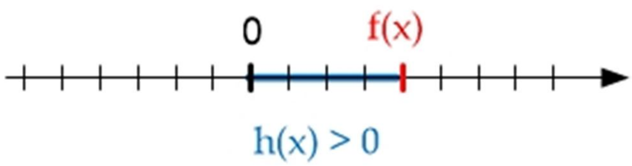
Il secondo membro deve essere minore della radice ($1°M \geq 2°M$), quindi starà alla sua sinistra:



Esistono quindi due possibilità:

- **$h(x)$ è positivo**
- **$h(x)$ è negativo**

Se $h(x) > 0$ allora lo schema diventa:



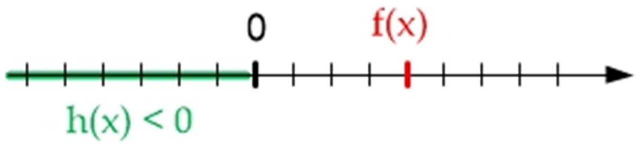
Bisogna quindi imporre tre condizioni:

- il radicando è positivo
- il secondo membro è positivo
- il secondo membro è minore del primo

Questo significa risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{f(x) \geq 0} \\ \boldsymbol{h(x) > 0} \\ \boldsymbol{(\sqrt{f(x)})^2 \geq (h(x))^2} \end{cases}$$

Se invece $h(x) < 0$ allora lo schema diventa:



Visto che un numero negativo sarà sempre minore di uno positivo, in questo caso bisogna imporre solo 2 condizioni:

- il radicando è positivo
- il secondo membro è positivo

Questo significa risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{f(x) \geq 0} \\ \boldsymbol{h(x) < 0} \end{cases}$$

Di conseguenza la soluzione dell'equazione sarà l'unione di queste due:

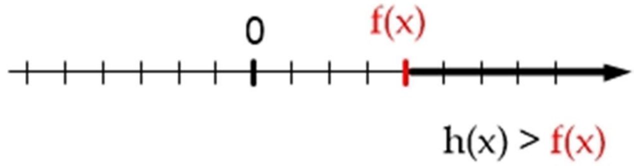
$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ h(x) < 0 \end{cases} \quad U \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \\ f(x) \geq h^2(x) \end{cases}$$

CASO 2

$$\sqrt{f(x)} \leq h(x)$$

Anche in questo caso la radice è sicuramente positiva, quindi sta alla destra dello zero.

Il secondo però membro deve essere maggiore della radice, quindi starà alla sua sinistra:



Essendo entrambi positivi, è sufficiente imporre che:

- il radicando è positivo
- il secondo membro è positivo
- il secondo membro è minore del primo

Questo significa risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ h(x) > 0 \\ (\sqrt{f(x)})^2 \leq (h(x))^2 \end{cases}$$

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO

Il valore assoluto, o modulo, è un operatore matematico che rende positivo tutto quello che c'è al suo interno.

Ad esempio:

$$|2| = 2$$

$$|-2| = 2$$

Finché nel valore assoluto ci sono solo numeri le cose sono semplici. Quando invece all'interno del valore assoluto si trova l'incognita il problema si complica.

Analizziamo quello che succede all'interno del valore assoluto.

- Se quello c'è dentro è positivo, il valore assoluto non cambia la situazione: è come se il valore assoluto non ci fosse.
- Se quello che c'è dentro è negativo, il valore assoluto lo fa cambiare di segno.

Ad esempio:

$$|x + 1| = 2$$

Se $x + 1 \geq 0$, cioè se $x \geq -1$, è come se il valore assoluto non ci fosse. Infatti:

$$|0 + 1| = 0 + 1$$

$$|1 + 1| = 1 + 1$$

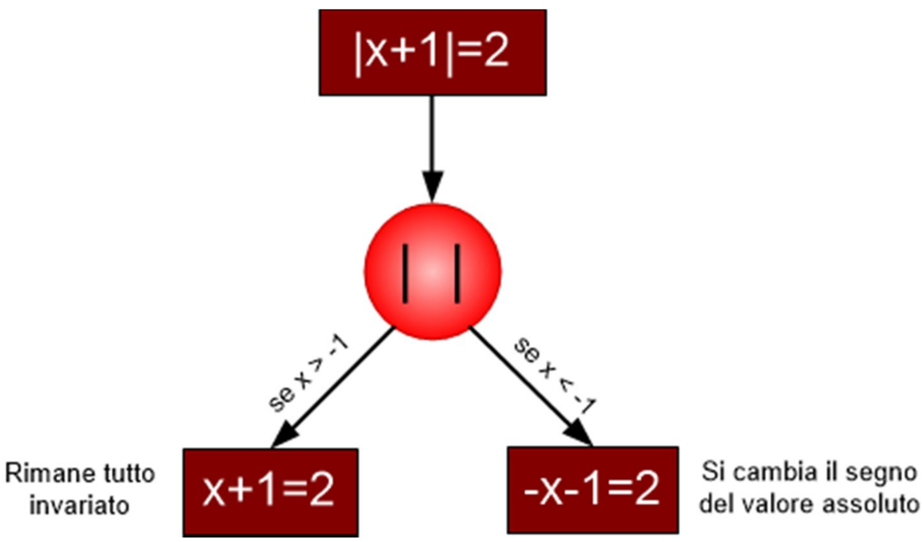
Invece, se $x + 1 < 0$, cioè se $x < 0$, allora quello che c'è dentro il valore assoluto cambia di segno. Infatti:

$$|-2 + 1| = -(-2 + 1) = 1$$

$$|-3 + 1| = -(-3 + 1) = 2$$

Quindi per risolvere un'equazione con valore assoluto si sdoppia l'equazione in due parti:

$$|x + 1| = 2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} se\ \ x + 1 \geq 0 & x + 1 = 2 \quad \rightarrow \quad x = -1 \\ se\ x + 1 < 0 & -x - 1 = 2 \quad \rightarrow \quad x = -3 \end{cases}$$



Otteniamo due sistemi che vanno uniti:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x + 1 = 2 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x + 1 < 0 \\ -x - 1 = 2 \end{cases}$$

Nel caso in cui si abbia una disequazione le cose non cambiano: semplicemente al posto di risolvere due equazioni si risolveranno due disequazioni.